I) Auto-test : Sommations

1. Donner les trois manipulations légitimes sur les sommes.

Théorème (Règles de calcul sur les sommes)

1. Sommer les constantes
Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une constante fixée.
Alors
$$\sum_{i \in I} \lambda = \lambda \times \text{card}(I)$$
2. Factoriser les constantes
Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ alors
$$\sum_{i \in I} \lambda a_i = \lambda \sum_{i \in I} a_i$$
3. "Éclater" les sommes en deux
$$\sum_{i \in I} (a_i + b_i) = \sum_{i \in I} a_i + \sum_{i \in I} b_i$$

2. Dans $\sum_{k=p}^{n} ...$, combien y a-t-il de termes ? ($p \leq n \in \mathbb{N}$)

Remarque :
Dans $\sum_{k=p}^{n} ...$ il y a $n - p + 1$ termes.

3. SAVOIR REFAIRE : prouver l'une des trois formules sur la somme des premiers entiers/carrés/cubes.

Théorème

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors
1.
$$1 + 2 + ... + n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$
2.
$$1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
3.
$$1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Preuve :
1. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$
Initialisation : $n = 1$
$$\sum_{k=1}^{1} k = 1 \qquad \frac{1(1+1)}{2} = 1$$

Hérédité :
On suppose la formule vraie au rang $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k &= 1+2+...+n+(n+1) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \qquad \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= \frac{1}{2}\left(n(n+1)+2(n+1)\right) \\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{2}
\end{aligned}$$

Donc la propriété est vraie au rang $(n+1)$.
Ce qui achève la récurrence.

2. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$
Initialisation : $n = 1$

$$\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1 \qquad \frac{2\times 3}{6} = 1$$

Hérédité :
On suppose la formule vraie au rang $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \times (n+1)^2 \qquad \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= \frac{n+1}{6}\left(n(2n+1)+6(n+1)\right) \\
&= \frac{n+1}{6}\left(2n^2+7n+6\right)
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
\frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6} &= \frac{n+1}{6}\left((n+2)(2n+3)\right) \\
&= \frac{n+1}{6}\left(2n^2+7n+6\right)
\end{aligned}$$

Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$
Ainsi la formule est vraie au rang $n+1$.
Ce qui achève la récurrence.

3. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$
Initialisation : $n = 1$

$$\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1 \qquad \left(\frac{2}{2}\right)^2 = 1$$

Hérédité :

On suppose la formule vraie au rang $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} &= \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 \\
&= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 \qquad \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= \frac{(n+1)^2}{4}\left(n^2 + 4(n+1)\right) \\
&= \frac{(n+1)^2}{4}\left((n+2)^2\right) \\
&= \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

Ainsi la formule est vraie au rang $n+1$.
Ce qui achève la récurrence.

4. SAVOIR REFAIRE : prouver la formule donnant la somme des premiers termes d'une suite géométrique.

Théorème

Soit $q \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$
Alors

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si} \quad q \neq 1 \\ n+1 & \text{si} \quad q = 1 \end{cases}$$

Preuve :

$$\begin{aligned}
(1-q) \times \left(\sum_{k=0}^{n} q^k\right) &= \left(\sum_{k=0}^{n} q^k\right) - q\left(\sum_{k=0}^{n} q^k\right) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} q^k\right) - \left(\sum_{k=0}^{n} q^{k+1}\right) \\
&= (q^0 + q^1 + ... + q^n) - (q^1 + ... + q^{n+1}) \\
&= 1 - q^{n+1}
\end{aligned}$$

Ainsi $(1-q) \times \left(\sum_{k=0}^{n} q^k\right) = 1 - q^{n+1}$
Donc si $q \neq 1$, alors $1 - q \neq 0$
Donc $\sum_{k=0}^{n} q^k = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$
Si $q = 1$, alors $\sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$

5. SAVOIR REFAIRE : calculer pour $n \geq 3$ et $r \neq 1$: $S_n = \sum_{k=3}^{n} r^k$

On fait un changement d'indice.

On pose $p = k - 3$
Donc

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{p=0}^{n-3} r^{p+3} \\ &= \sum_{p=0}^{n-3} r^3 \times r^p \\ &= r^3 \times \sum_{p=0}^{n-3} r^p \\ &= r^3 \times \left(\frac{1-q^{n-2}}{1-q}\right) \qquad \text{car } q \neq 1 \end{aligned}$$

6. Donner la définition et les propriétés élémentaires des combinaisons $\binom{n}{k}$. Donner le lien avec le triangle de PASCAL.

Définition

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq k \leq n$
On note $\binom{n}{k}$ le nombre de façons de choisir k éléments parmi n éléments.
C'est aussi le nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments

Théorème

Propriétés Soient $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq k \leq n$

1. $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$
2. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
3. $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

Le Triangle de Pascal sert à calculer les premiers k parmi n

n/k	0	1	2	3	4	5	$\cdots$	k
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
$\vdots$							$\ddots$	
n								1

7. SAVOIR REFAIRE : énoncer et prouver la formule du binôme de NEWTON

Théorème (Binôme de Newton)

Si a et b sont dans $\mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$
Alors

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \times b^{n-k}$$

Preuve :
Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, a et b fixés dans $\mathbb{C}$
Initialisation : $n = 0$

$$(a+b)^0 = 1 \qquad \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{0} a^k b^{0-k} = \binom{0}{0} a^0 \times b^0 = 1$$

Hérédité :
Supposons la formule vraie au rang $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&= (a+b) \times \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \times b^{n-k} \\
\text{par hypothèse de récurrence} & \\
&= a \times \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \right) + b \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}
\end{aligned}$$

Changement d'indice on pose $p = k + 1$

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= \sum_{p=1}^{n+1} \binom{n}{p-1} a^p b^{(n+1)-p} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{(n+1)-k} \\
&= \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 + \sum_{p=1}^{n} \binom{n}{p-1} a^p b^{(n+1)-p} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{(n+1)-k} + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k b^{(n+1)-k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{(n+1)-k} + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \left(\sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] a^k b^{(n+1)-k} \right) + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{(n+1)-k} \right) + b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{(n+1)-k}
\end{aligned}$$

Ce qui achève la récurrence.

8. SAVOIR REFAIRE : Calculer $\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}$, pour $x \in \mathbb{R}$

On envisage pour $x \in \mathbb{R}$

$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \times 1^{n-k}$$

On isole le terme en $k = 0$ avant de dériver

$$(x+1)^n = \binom{n}{0} x^0 + \sum_{k=1}^{n} x^k \binom{n}{k}$$

On dérive

$$n(x+1)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k x^k$$

En particulier, pour $x = 1$, on a

$$n2^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k}$$

Or le terme en $k = 0$ est nul Donc

$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$$

9. Énoncer le principe de simplification "télescopique".

Théorème

Soit $(u_k)_{m\leq k\leq n+1}$ des nombres complexes où $m \leq n$
Alors
$$\sum_{k=m}^{n}(u_{k+1}-u_k) = u_{n+1}-u_m$$

10. SAVOIR REFAIRE : énoncer et prouver la formule $a^n - b^n = ...$

Corollaire

Soient a et b des complexes et $n \in \mathbb{N}^*$
Alors
$$a^n - b^n = (a-b)\times\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{(n-1)-k}\right)$$

Preuve :

$$\begin{aligned}(a-b)\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{(n-1)-k}\right) &= a\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{(n-1)-k} - b\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{(n-1)-k}\\ &= \sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1} b^{n-(k+1)} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k}\end{aligned}$$

On pose $u_k = a^k b^{n-k}$
Ainsi
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1}-u_k) &= u_n - u_0 \qquad \text{par simplification télescopique}\\ &= a^n - b^n\end{aligned}$$

11. Énoncer le principe de FUBINI pour $\sum_{(i,j)\in I\times J} a_i.b_j$ où I et J sont des ensembles finis et les a_i et b_j sont des nombres complexes. De même pour $\sum_{1\leq i\leq j\leq n} a_{ij}$ (séparer en deux sommes).

Théorème

Soient I et J des ensembles finis, $(a_{ij})_{(i;j)\in I\times J}$ une famille de nombre complexe.
Alors
$$\begin{aligned}\sum_{(i;j)\in I\times J} a_{ij} &= \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} a_{ij}\right)\\ &= \sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} a_{ij}\right)\end{aligned}$$