I) Auto-test : Limites

1. Donner les 9 définitions sur les limites

Définition

$f : I \to \mathbb{R}, a \in \bar{I}, \ell \in \overline{\mathbb{R}}$
1. Cas où $\ell \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$

$$f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell \text{ ssi } \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, (|x-a| \leq \delta) \Rightarrow (|f(x)-\ell| \leq \varepsilon)$$

2. Cas où $\ell = +\infty$ et $a \in \mathbb{R}$

$$f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty \text{ ssi } \forall A > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, (|x-a| \leq \delta) \Rightarrow (f(x) \geq A)$$

3. Cas où $\ell = -\infty$ et $a \in \mathbb{R}$

$$f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} -\infty \text{ ssi } \forall A < 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, (|x-a| \leq \delta) \Rightarrow (f(x) \leq A)$$

4. Cas où $\ell \in \mathbb{R}$ et $a = +\infty$

$$f(x) \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} \ell \text{ ssi } \forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, \forall x \in I, (x \geq A) \Rightarrow (|f(x)-\ell| \leq \varepsilon)$$

5. Cas où $\ell = +\infty$ et $a = +\infty$

$$f(x) \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} +\infty \text{ ssi } \forall A > 0, \exists B > 0, \forall x \in I, (x \geq B) \Rightarrow (f(x) \geq A)$$

6. Cas où $\ell = -\infty$ et $a = +\infty$

$$f(x) \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} -\infty \text{ ssi } \forall A \leq 0, \exists B \geq 0, \forall x \in I, (x \geq B) \Rightarrow (f(x) \leq A)$$

7. Cas où $\ell \in \mathbb{R}$ et $a = -\infty$

$$f(x) \underset{x\to -\infty}{\longrightarrow} \ell \text{ ssi } \forall \varepsilon > 0, \exists B < 0, \forall x \in I, (x \leq B) \Rightarrow (|f(x)-\ell| \leq \varepsilon)$$

8. Cas où $\ell = +\infty$ et $a = -\infty$

$$f(x) \underset{x\to -\infty}{\longrightarrow} +\infty \text{ ssi } \forall A > 0, \exists B < 0, \forall x \in I, (x \leq B) \Rightarrow (f(x) \geq A)$$

9. Cas où $\ell = -\infty$ et $a = -\infty$

$$f(x) \underset{x\to -\infty}{\longrightarrow} -\infty \text{ ssi } \forall A < 0, \exists B < 0, \forall x \in I, (x \leq B) \Rightarrow (f(x) \leq A)$$

2. SAVOIR REFAIRE : prouver l'unicité de la limite en raisonnant en terme de voisinages.

Théorème

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell'$
Alors $\ell = \ell'$

Preuve :
Par l'absurde :

si $\ell \neq \ell'$, il existe deux voisinages U_e et U'_e de ℓ et ℓ' respectivement tq $U_e \cap U'_e = \varnothing$
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ d'où un certain V_a voisinage de a tq $f(V_a \cap I) \subset U_e$
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell'$ d'où un certain V'_a voisinage de a tq $f(V'_a \cap I) \subset U'_e$
On pose $W_a = V_a \cap V'_a$
D'après les propriétés élémentaires du voisinage, W_a est un voisinage de a
Or $a \in \bar{I}$, donc $W_a \cap I \neq \varnothing$ et $f(W_a \cap I) \subset U_e \cap\ U'_e$
Contradiction, puisque $U_e \cap U'_e = \varnothing$

3. Donner les définitions de limite à droite, de limite à gauche, puis de limite pointée. En déduire des exemples de fonctions qui n'ont pas de limite.

Définition (limite à droite/gauche)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in \bar{I}$; $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$
1. On dit que f admet ℓ pour limite à gauche en a lorsque : $f|_{I \cap]-\infty;a[}$ admet ℓ pour limite en a.
2. On dit que f admet ℓ pour limite à droite en a lorsque : $f|_{I \cap]a;+\infty[}$ admet ℓ pour limite en a.

Définition (limite pointée)

Soient $f : I \to \mathbb{R}$, $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, $a \in \bar{I}$; a réel
On dit que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a, x différent de a lorsque : pour tout voisinage U_e de ℓ, il existe un voisinage V_a de a tq $\forall x \in (I \cap V_a) \backslash \{a\}$, $f(x) \in U_e$

4. Donner les relations entre limites et inégalités larges, puis inégalités strictes.

Théorème (Propriétés : Inégalités larges)

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$, $a \in \bar{I}$, ℓ et ℓ' dans $\mathbb{R}$
On suppose : $\forall x \in I, f(x) \leq g(x)$ et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell'$
Alors $\ell \leq \ell'$

Théorème (Propriétés : Inégalités strictes)

Soient $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in \bar{I}$, $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, M et m dans $\mathbb{R}$
On suppose que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$

Alors : Si $\ell < M$, alors au voisinage de $a, f(x) < M$

Si $\ell > m$, alors au voisinage de $a, f(x) > m$

5. Donner la caractérisation séquentielle des limites.

Théorème

Soient $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in \bar{I}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$
Alors $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell \Leftrightarrow$ Pour toute suite (u_n) dans I tq $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$ on a $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$

6. SAVOIR REFAIRE : montrer que $\cos$ n'a pas de limite en $+\infty$, et que $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite en 0^+

1. Montrons que $\cos(x)$ n'est pas de limite en $+\infty$
En effet, on pose $u_n = n$, $f(u_n) = \cos(n)$ qui diverge de $2^{\text{ème}}$ espéce (ch. chapitre suites).
Donc f n'a pas de limite en $+\infty$, car si on avait $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ alors on aurait $\cos(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$

2. Montrons que $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite en 0^+
On utilise deux suites qui tendent vers zèro.

$$x_n = \frac{1}{\pi n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad\qquad y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Selon le théorème de caractérisation séquentielle, si f admet une limite ℓ en 0^+, on aurait $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $f(y_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$

Or si $n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) = \sin(\pi n) = 0$
$f(y_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1$
On aurait alors $0 = 1$ Contradiction.

Conclusion : f n'a pas de limite en 0^+

7. SAVOIR REFAIRE : montrer que la fonction de Dirichlet, indicatrice de $\mathbb{Q}$, n'a de limite en aucun point.

Soit $a \in \mathbb{R}$ (fixé). Mq f n'a pas de limite en a.
$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$: d'où une suite (x_n) dans $\mathbb{Q}$ tq $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(x_n) = 1 \qquad \text{donc} \qquad f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

$\mathbb{R}\backslash\{\mathbb{Q}\}$ est aussi dense dans $\mathbb{R}$ d'où une suite (y_n) dans $\mathbb{R}\backslash\{\mathbb{Q}\}$ tq $y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$
Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(y_n) = 0$ donc $f(y_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Selon le théorème de caractérisation séquentielle si f admettait une limite on aurait $0 = 1$ Impossible.

Conclusion : f n'a pas de limite en a.

8. SAVOIR REFAIRE : énoncer et prouver le théorème d'encadrement pour les limites.

Théorème

Soient $f,\, g,\, h : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \bar{I},\, \ell \in \overline{\mathbb{R}}$
On suppose que $\forall x \in I,\, g(x) \leq f(x) \leq h(x)$

1. Si $\left.\begin{array}{l} g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell \\ h(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell \end{array}\right\}$ Alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$
2. Si $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$
3. Si $h(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} -\infty$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$

Preuve :
1. Soit $\varepsilon > 0$
$g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$, d'où un certain $\delta_1 > 0$ tq $\forall x \in I, (|x-a| \leq \delta_1) \Rightarrow (|g(x)-\ell| \leq \varepsilon)$
$h(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$, d'où un certain $\delta_2 > 0$ tq $\forall x \in I, (|x-a| \leq \delta_2) \Rightarrow (|h(x)-\ell| \leq \varepsilon)$

On pose $\delta = \max\{\delta_1, \delta_2\} > 0$
Si $x \in I$ et si $|x-a| \leq \delta$

Alors $|x-a| \leq \delta_1$ donc $\ell - \varepsilon \leq g(x) \leq \ell + \varepsilon$

$|x-a| \leq \delta_2$ donc $\ell - \varepsilon \leq h(x) \leq \ell + \varepsilon$

Donc selon $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$
$\ell - \varepsilon \leq g(x) \leq f(x) \leq h(x) \leq \ell + \varepsilon$
Ainsi $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$
donc $\lim\limits_{n\to a} f(x) = \ell$

2. Soit $A > 0$
$g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$, d'où un certain $\delta > 0$ tq si $x \in I$ et si $|x-a| \leq \delta$ alors $g(x) \geq A$
Mais alors $f(x) \geq g(x) \geq A$
donc $\lim\limits_{n\to a} f(x) = +\infty$

3. Soit $A < 0$
$h(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} -\infty$, d'où un certain $\delta > 0$ tq si $x \in I$ et si $|x-a| \leq \delta$ alors $h(x) \leq A$
Mais alors $f(x) \leq h(x) \leq A$
donc $\lim\limits_{n\to a} f(x) = -\infty$

9. Énoncer les rappels essentiels sur les fonctions monotones : définitions, composition et réciproque dans le cas bijectif.

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$
f est dite croissante ssi $\forall (x;y) \in I^2$, $(x \leq y) \Rightarrow (f(x) \leq f(y))$
f est dite strictement croissante ssi $\forall (x;y) \in I^2$, $(x < y) \Rightarrow (f(x) < f(y))$
f est dite décroissante ssi $\forall (x;y) \in I^2$, $(x \leq y) \Rightarrow (f(x) \geq f(y))$
f est dite strictement croissante ssi $\forall (x;y) \in I^2$, $(x < y) \Rightarrow (f(x) > f(y))$

Définition (Composition)

f croissante et g croissante $\Rightarrow g \circ f$ croissante
f décroissante et g décroissante $\Rightarrow g \circ f$ croissante
f décroissante et g croissante $\Rightarrow g \circ f$ décroissante
f croissante et g décroissante $\Rightarrow g \circ f$ décroissante

Définition (Réciproque)

Si $f : I \to J$ est bijective et monotone.
Alors la fonction réciproque $f^{-1} : J \to I$ est aussi monotone et de même sens de variation que f

10. Énoncer le théorème de la limite monotone en un point intérieur à l'intervalle. Illustrer pour les fonctions croissantes et décroissantes.

Théorème

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction monotone sur I

Alors f admet $\left|\begin{array}{l}\text{une limite à droite}\\ \text{une limite à gauche}\end{array}\right|$ finies en chaque point "a" intérieurs a I

De plus, si f est croissante alors, $f(a-0) \leq f(a) \leq f(a+0)$
si f est décroissante alors, $f(a+0) \leq f(a) \leq f(a-0)$

11. Énoncer le théorème de la limite monotone aux bords de l'intervalle pour une fonction croissante. Illustrer pour les fonctions croissantes et la borne supérieure de l'intervalle par 4 dessins.

Théorème

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction monotone sur I

On pose $M = \sup(I)$ et $m = \inf(I)$ (dans $\overline{\mathbb{R}}$)

Alors $\lim\limits_{x \to M^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to m^+} f(x)$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$

De plus, par exemple, si f est croissante, alors

— $\lim\limits_{x \to M^-} f(x) \in \mathbb{R}$ si f est majorée, et vaut $+\infty$ sinon.

— $\lim\limits_{x \to m^+} f(x) \in \mathbb{R}$ si f est minorée, et vaut $-\infty$ sinon.

12. Donner les définitions des notions de négligeabilité, équivalence au voisinage d'un point.

Définition (négligeabilité)

On dit que f est négligeable devant g ou que g est prépondérante devant f au voisinage de a lorsqu'il existe une fonction $\varepsilon : J \to \mathbb{R}$ où J un voisinage de a tq :
- $\forall x \in J, f(x) = \varepsilon(x)g(x)$
- $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$

Mêmes notations que les suites.

Définition (équivalence)

On dit que f et g sont équivalentes au voisinage de a lorsqu'il existe $\varepsilon : J \to \mathbb{R}$ où J est un voisinage de a tq :
- $\forall x \in J, f(x) = (1 + \varepsilon(x))g(x)$
- $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$

Mêmes notations que les suites.

13. Donner les négligeabilités usuelles en $+\infty$.

Théorème

1. Puissance : si $\alpha < \beta$ alors $x^\alpha \underset{+\infty}{\ll} x^\beta$
2. Soient $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $a > 1$

$$(\ln(x))^\beta \underset{+\infty}{\ll} x^\alpha \underset{+\infty}{\ll} a^x \underset{+\infty}{\ll} x^x$$

14. Donner les équivalents usuels en zéro (12 équivalents).

Théorème

1. exp, ln, puissance : $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$
$$e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$$
$$(1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x$$

2. Trigo circulaire : $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$
$$1-\cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$$
$$\tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$$

3. Trigo hyperbolique : $sh(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$
$$ch(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$$
$$th(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$$

4. Trigo inverse : $\arcsin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$
$$\arctan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$$
$$\frac{\pi}{2} - \arccos(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$$

15. SAVOIR REFAIRE : donner un équivalent en zéro de $e^{\tan(x)} - \cos(x)$ puis de $e^{\sin(\ln(x))} - 1$ en 1.

Exemple 1 :

Soit $x \in \mathbb{R}$
$f(x) = e^{\tan(x)} - 1 + 1 - \cos(x)$
On pose $y = \tan(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$
Or $e^y - 1 \underset{y\to 0}{\sim} y$
Donc $e^{\tan(x)} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \tan(x)$ or $\tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$
Donc $e^{\tan(x)} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$
Par ailleurs $1 - \cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$
or $\dfrac{x^2}{2} \underset{x\to 0}{\ll} x$ donc $1 - \cos(x) \underset{x\to 0}{\ll} e^{\tan(x)} - 1$
On néglige ce qui est négligeable.
Donc $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$

Exemple 2 :

On pose : $y = \sin(\ln(x)) \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 0$
or $e^y - 1 \underset{y\to 0}{\sim} y$
Donc $f(x) \underset{x\to 1}{\sim} \sin(\ln(x))$
On pose $t = \ln(x) \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 0$ or $\sin(t) \underset{t\to 0}{\sim} t$
Donc $f(x) \underset{x\to 1}{\sim} \ln(x)$
On pose $x = 1 + h$

or $\ln(1+h) \underset{h\to 0}{\sim} h$
Donc $f(x) \underset{x\to 1}{\sim} x-1$

16. Soit λ une constante réelle. Que signifie $f(x) \underset{x\to a}{\sim} \lambda$, si $\lambda \neq 0$? Et si $\lambda = 0$?

Théorème

1. Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \lambda \in \mathbb{R}^*$ ($\lambda \neq 0$ et $\lambda \neq \pm\infty$), alors $f(x) \underset{x\to a}{\sim} \lambda$
2. Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ alors $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$

Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \lambda$ et si $\lambda = 0$ alors f est une constante.

17. SAVOIR REFAIRE : pour $x > 0$, on pose $f(x) = x + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2+\sqrt{x}}$. Déterminer une asymptote à f en $+\infty$ et préciser sa position par rapport à la courbe.

$\mathscr{C}_f$ admet en $+\infty$ une asymptote oblique évidente $\Delta : y = x$
Il s'agit d'étudier le signe de $f(x) - x$ au voisinage de $+\infty$
On cherche donc un équivalent :
Ici $\sqrt{x} \underset{+\infty}{\ll} x^2$, $x^2 + \sqrt{x} \underset{+\infty}{\sim} x^2$ donc $\dfrac{1}{x^2+\sqrt{x}} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$
Or $\dfrac{1}{x^2} \underset{+\infty}{\ll} \dfrac{1}{x}$
Donc $f(x) - x \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x} > 0$, donc au voisinage de $+\infty$, $f(x) \geq x$ i.e. $\mathscr{C}_f$ est au dessus de Δ