# I) Auto-test : Continuité

**1. Donner la définition d'une fonction continue en $a \in \mathbb{R}$, avec une version quantifiée. Illustrer par 2 dessins (continue/discontinue). Donner des exemples de fonctions discontinues.**

**Définition**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$
On dit que $f$ est continue en $a$ lorsque $f$ admet une limite finie en $a$. Cette limite est alors forcément $f(a)$.
Ainsi $f$ est continue en $a$ ssi $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} f(a)$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, (|x-a| \leq \delta) \Rightarrow (|f(x) - f(a)| \leq \varepsilon)$$

**2. Fonctions lipschitzienne : définition, 2 exemples et un contre-exemple continu.**
**SAVOIR REFAIRE : Montrer que toute fonction lipschitzienne est continue.**

**Définition**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que $f$ est lipschitzienne sur $I$ lorsqu'il existe un certain $\lambda > 0$ tq

$$\forall (x,y)^2 \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq \lambda |x-y|$$

**Preuve :**
On suppose que $f$ est $\lambda-$lipschitzienne sur $I$ où $\lambda > 0$
Soit $a \in I$. Montrons que $f$ est continue en $a$
Soit $\varepsilon > 0$, on pose $\delta = \dfrac{\varepsilon}{\lambda}$
Soit $x \in I$ tq $|x-a| \leq \delta$
Alors $|f(x) - f(a)| \leq \lambda |x-a| \leq \lambda \delta = \varepsilon$
i.e. $f$ est continue en $a$.

Exemples :

1.Les fonctions affines $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto ax+b \end{array}$ sont lipschitziennes sur $\mathbb{R}$

En effet si $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, alors

$$\begin{array}{rcl} |f(x) - f(y)| & = & |ax+b-(ay+b)| \\ & = & |a||x-y| \end{array}$$

Donc $f$ est $|a|-$lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ (Donc continue sur $\mathbb{R}$)

2. Les valeurs absolues $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto |x| \end{array}$ sont lipschitziennes sur $\mathbb{R}$

En effet si $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ alors $|f(x) - f(y)| = ||x| - |y|| \leq |x-y|$
Donc $f$ est $1-$lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ (Donc continue sur $\mathbb{R}$)

3.$f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{array}$ est continue sur $\mathbb{R}$ mais non lipschitzienne sur $\mathbb{R}$

- $f$ est continue (cf théorèmes opératoires)

• $f$ n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}$

En effet par l'absurde, soit $\lambda > 0$ tq $\begin{array}{lcl} \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad |f(x) - f(y)| & \leq & \lambda |x-y| \\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad |x^2 - y^2| & \leq & \lambda |x-y| \end{array}$

CP : $y = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x|^2 \leq \lambda |x|$
Si $x > 0$, $|x| < \lambda$ faux avec $x = \lambda + 1$
Contradiction.

### 3. Donner la caractérisation séquentielle de la continuité. A quoi cela peut-il servir ?

**Théorème**

Soient $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$ alors
$f$ est continue en $a \Leftrightarrow$ pour toute suite $(x_n)$ de $I$ qui converge vers $a$, $f((x_n))$ converge vers $f(a)$

### 4. Donner un exemple de fonction prolongeable par continuité et un contre-exemple

**Définition**

Soit $f : I \backslash \{a\} \to \mathbb{R}$ où $a \in \bar{I}$
On suppose que $f$ est continue sur $I \backslash \{a\}$
On suppose que $f$ admet un prolongement $\left| \begin{array}{c} \text{continu} \\ \\ \text{par continuité} \end{array} \right|$ en $a$ lorsque $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \in \mathbb{R}$
Ce prolongement continue est alors unique et obtenu en posant $f(a) = \ell$

### 5. SAVOIR REFAIRE : soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ additive et continue. Montrer que $f$ est une homothétie

1.a. Soient $x$ et $y$ dans $\mathbb{R}$
$f(x+y) - f(y) = f(x+y-y)$ car $f$ est additive
i.e. $f(x-y) + f(y) = f(x)$
Donc $f(x-y) = f(x) - f(y)$

1.b. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, on fixe $x \in \mathbb{R}$
Initialisation : $n = 0$
$x = y = 0$ donne $f(0+0) = f(0) + f(0)$ i.e. $f(0) = 0$
Donc $f(0 \times x) = f(0) = 0 = 0 \times f(x)$
Hérédité :
Soit $n \in \mathbb{N}$ tq $f(nx) = nf(x)$

$$\begin{array}{rcll} f((n+1)x) & = & f(nx + x) & \\ & = & f(nx) + f(x) & \text{car } f \text{ est additive} \\ & = & n(f(x)) + f(x) & \text{par hypothèse de récurrence} \\ & = & (n+1)f(x) & \end{array}$$

Ce qui achève la récurrence.

1.c. Soit $n \in \mathbb{Z}$.
Si $n \geq 0$, OK (cf 1.b.)

Si $n \leq 0$, alors on pose $p = -n \in \mathbb{N}$
$f(nx) = f(-px) = f(0 - px)$
D'après le 1.a., $f(nx) = f(0) - f(px) = -pf(x) = nf(x)$

1.d. Soit $r \in \mathbb{Q}$.
D'ou $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tq $r = \dfrac{p}{q}$
Soit $x \in \mathbb{R}$
Mq $f(rx) = rf(x)$
Mq $f\left(\dfrac{p}{q}x\right) = \dfrac{p}{q}f(x)$
Or $qf\left(\dfrac{p}{q}x\right) = f(px) = pf(x)$
Ainsi $f\left(\dfrac{p}{q}x\right) = \dfrac{p}{q}f(x)$
Remarque : avec $x = 1$ on obtient $\forall r \in \mathbb{Q}, f(r) = rf(1)$, donc si on pose $\lambda = f(x)$, $\forall r \in \mathbb{Q}$, $f(r) = \lambda r$ i.e. $f$ est linéaire sur $\mathbb{Q}$

2. On suppose maintenant que $f$ est continue sur $\mathbb{R}$.
On pose toujours $\lambda = f(1)$
Soit $x \in \mathbb{R}$
$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, d'où une suite $(r_n)$ de rationnels $r_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$
Si $n \in \mathbb{N}$, $f(r_n) = \lambda r_n$ quand $n$ tend vers $+\infty$ $f(x) = \lambda x$ car $f$ est continue en $x$ (continuité séquentielle)
Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \lambda x$

### 6. Citer le théorème des valeurs intermédiaires.

**Théorème** (TVI version ensembliste)

L'image d'un intervalle par une fonction continue est encore un intervalle

**Théorème** (TVI version pratique)

Si $f \to \mathbb{R}$ est continue sur l'intervalle $I$
Si $a < b$ dans $I$
Alors toute valeur intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$ est prise par $f$ i.e. elle est dans l'image de $f$

### 7. SAVOIR REFAIRE : montrer que $x \mapsto 2x^5 - 7x^3 + 2x^2 - 1$ s'annule sur $\mathbb{R}$

$P(x) \underset{+\infty}{\sim} 2x^5$, donc $P(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$
D'où un certain $b > 0$ tq $P(b) > 0$
$P(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty$
D'où un certain $a < 0$ tq $P(a) < 0$
D'où $c \in \mathbb{R}$ tq $P(c) = 0$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

### 8. SAVOIR REFAIRE : ("Petit BROUWER") : Soit $f : [a; b] \to [a; b]$ continue. Montrer que $f$ a un point fixe.

**Preuve :**

On envisage la fonction auxiliaire $g : \begin{array}{l} [a;b] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) - x \end{array}$

Il suffit de montrer que $g$ s'annule
$g(a) = f(a) - a \geq 0$ car $f(a) \in Imf \subset [a;b]$ donc $f(a) \geq a$
$g(b) = f(b) - b \leq 0$ car $f(b) \in Imf \subset [a;b]$ donc $f(b) \leq b$

Or $g$ est continue
Donc d'après le TVI, $g$ s'annule sur $[a;b]$
D'où $c \in [a;b]$ tq $g(c) = 0$ i.e. $f(c) = c$

### 9. Que dire d'une fonction continue sur un segment ? Puis : que signifie "elle atteint ses bornes" ?

**Théorème**

Toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

Soient $\left| \begin{array}{l} a < b \text{ dans } \mathbb{R} \\ f : [a;b] \to \mathbb{R} \text{ continue} \end{array} \right.$

Alors $f$ est borné et $\sup\limits_{[a;b]}(f) = M$ et $\inf\limits_{[a,b]}(f) = m$ sont atteints i.e. $\exists x_0 \in [a;b], f(x_0) = \sup\limits_{[a;b]}(f) = M$ et $\exists x_1 \in [a;b], f(x_1) = \inf\limits_{[a;b]}(f) = m$
i.e. $\sup\limits_{[a;b]}(f) = \max\limits_{[a;b]}(f)$ et $\inf\limits_{[a;b]}(f) = \min\limits_{[a;b]}(f)$

### 10. SAVOIR REFAIRE : soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue et telle que $f \xrightarrow[+\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$. Montrer que $f$ est bornée. Atteint-elle ses bornes ?

**Preuve :**
$f \xrightarrow[+\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$
Donc $\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, \forall x \in \mathbb{R}_+, (x \geq A) \Rightarrow (|f(x) - \ell| \leq \varepsilon)$
On choisit $\varepsilon = 1$, d'où $A > 0$ tq $\forall <\geq A, |f(x) - \ell| \leq 1$
si $x \geq A, |f(x)| = |f(x) - \ell + \ell| \leq |f(x) - \ell| + |\ell|$
$\forall w \geq A, |f(x)| \leq [\ell| + 1$
Par ailleurs $f$ est continue sur le segment $[0;A]$
Donc d'après le cours, $\exists M_1 > 0, \forall x \in [0;A], f(x) \leq M_1$
On pose $M = \max(M_1, |l| + 1)$
Ainsi $\forall c \in \mathbb{R}_+, f(x) \geq M$
Donc $f$ est bornée.

### 11. Que dire d'une fonction continue et injective sur un intervalle ?

Toute fonction continue et injective sur un intervalle est strictement monotone.

### 12. Énoncer le théorème de la bijection continue.

**Théorème** (bijection continue)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction strictement monotone et continue.

Alors 1. $f(I)$ est un intervalle (noté $J$)

2. $f$ réalise une bijection de $I$ sur $J$

3. la bijection réciproque, notée $f^{-1}$ est automatiquement continue de $J$ sur $I$

### 13. SAVOIR REFAIRE : soit $g : J \to \mathbb{R}$ strictement monotone telle que $g(J)$ soit un intervalle. Montrer que $g$ est continue sur $J$

**Lemme**

Soit $g : J \to \mathbb{R}$ (où $J$ est intervalle non trivial de $\mathbb{R}$) tq $g$ est strictement monotone et $f(J)$ est un intervalle.
Alors $g$ est continue en $J$.

**Preuve :**
Soit $a \in J$, montrons que $g$ est continue en $a$.
Supposons que $\overset{\circ}{J}$ (point intérieur)
D'après le TLM, $g$ admet une limite à gauche et une limite à droite en $a$.
Supposons que $g$ est strictement croissante.
D'après le TLM, $g(a-0) \leq g(a) \leq g(a+0)$
$g$ est continu en $a$ ssi $g(a-0) = g(a) = g(a+0)$ $g$ est strictement croissante

donc $g(J\cap]-\infty;a[) \subset ]-\infty;g(a-0)[$

i.e. $\forall x \in J_1, (x < a) \Rightarrow (g(x) \leq g(a-0))$

$g(J\cap]a;+\infty[) \subset ]g(a+0);+\infty[$

i.e. $\forall x \in J_2, (x > 0) \Rightarrow (g(x) \geq g(a+0))$

On a $J = J_1 \bigsqcup \{a\} \bigsqcup J_2$
Donc $g(J) = g(J_1) \cup \{a\} \cup g(J_2)$ (par un intervalle si $g(a-0) < g(a)$ ou si $g(a+0) > g(a)$)
Donc $g(a-0) = g(a) = g(a+0)$
Si $a \notin \underset{\circ}{J}$ EXO

### 14. Donner la définition d'une fonction uniformément continue et quelques exemples

**Définition**

On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est uniformément continue sur $I$ lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (x,y) \in I^2, (|x-y| \leq \delta) \Rightarrow (|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon)$$

### 15. Donner 3 exemples de fonction non uniformément continue, mais continues.

1. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}$ est continue mais pas uniformément continue sur $\mathbb{R}_+^*$

Idée : $f$ explose brutalement en 0
On psoe $x_n = \dfrac{1}{n+1}$ et $y_n = \dfrac{1}{n}$
Ainsi $(x_n - y_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
Cependant $|f(x_n) - f(y_n)| = |n+1-n| = 1$ que ne tend pas vers 0
Donc $f$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}_+^*$

$$2.f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$ est $C^\circ$ mais pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$

Moralement elle tend trop vite vers $+\infty$ et $-\infty$

On pose $x_n = \sqrt{n+1}$ et $y_n = \sqrt{n}$
$|x_n - y_n| = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
Cependant $|f(x_n) - f(y_n)| = \left(\sqrt{n+1}\right)^2 - \left(\sqrt{n}\right)^2 = n+1-n = 1$ que ne tend pas vers 0
Donc $f$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$

3. Vrai-Faux : "$fC^\circ$ est bornée $\Rightarrow f$ uniformément continue"
Faux : Contre exemple : "Serpent frénétique"

$$f: \begin{array}{rcl} ]0;1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin\left(\frac{1}{x}\right) \end{array}$$ est bornée mais pas uniformément continue sur $]0;1]$

On choisit $x_n = \dfrac{1}{2\pi n}$ et $y_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{n} + 2\pi n}$
$(x_n - y_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
Cependant $|f(x_n) - f(y_n)| = \sin(2\pi n) - \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1$ qui ne tend pas vers 0

### 16. Donner les rapports entre fonction : continue/lipschitzienne/uniformément continue.

**Théorème** (Comparaison de trois notions)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ alors
$f$ lipschitzienne sur $I^{\Rightarrow} f$ est uniformément continue sur $I \Rightarrow f$ est $C^\circ$ sur $I$
sans réciproque en général.

### 17. Énoncer le théorème de Heine.

**Théorème**

Toute fonction continue sur un segment est uniformément continue.