I) Auto-test : Dérivabilité

1. Donner la définition d'une fonction dérivable en $a \in \mathbb{R}$, puis sur un intervalle. Donner une interprétation géométrique en termes de pentes.

Définition (Dérivabilité ponctuelle)

On dit que f est dérivable en a lorsque $\tau_a : \begin{array}{ccc} I\backslash\{a\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \tau_a(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{array}$
admet une limite finie quand x tend vers $a (x \neq a)$.
Si c'est le cas, alors la limite en question est appelé nombre dérivée de f en a et noté $f'(a)$

Définition (Fonction dérivée)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$
1. On dit que f est dérivable sur I lorsque f est dérivable en tout point de I i.e. $f \in \cap \underset{a\in\mathbb{R}}{\Delta}{}^{I} a(I, \mathbb{R})$
On note alors $f \in \Delta^1(I, \mathbb{R})$, on peut envisager la fonction
$f' : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) \end{array}$ appelé fonction dérivée de f.

Interprétation géométrique :

$\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est la pente de la corde qui relie les point $A(a; f(a))$ et $B(b; f(b))$ (coefficient directeur)
Si f est dérivable en a, alors $f'(a)$ est la "pente limite" de cette courbe quand x tend vers a.

2. Donner 3 exemples de fonctions continue non dérivable en zéro pour des raisons différentes.

3. Fonction valeurs absolue
$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |x| \end{array}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ mais pas en zéro.
En effet si $a \neq 0$, si $a > 0$ alors $f : x \mapsto x$ dans un voisinage de a, donc dérivable en a et $f'(a) = 1$ (cf 2.)
Si $a < 0$, alors $f : x \mapsto -x$ dans un voisinage de a
Donc f est dérivable en a et $f'(a) = -1$
Si $a = 0$, soit $x \neq 0$

$$\tau_a(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{|x|}{x} = \begin{array}{l} 1 \text{ si } x > 0 \\ -1 \text{ si } x < 0 \end{array}$$

Donc $\exists f'_d(x) = 1$ et $\exists f'_g(x) = -1$
D'où le point anguleux.

4.$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$

4.1. f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall a > 0$, $f'(a) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
4.2. f n'est pas dérivable en zéro et admet une tangente verticale.

Preuve :
4.1. Soit $a > 0$, si $x \neq 0$, $x > 0$, alors on pose

$$\begin{aligned}
\tau_a(x) &= \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \\
&= \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} \\
&= \frac{x-a}{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} \xrightarrow[x\neq 0]{x\to a} \frac{1}{2\sqrt{a}} \qquad \text{car } \sqrt{\bullet} \text{ est continu en } a
\end{aligned}$$

4.2. En $a = 0$, si $x > 0$
$\tau_0(x) = \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0} = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$

$$5.f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \end{array} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^*, |f(x)| \leq |x|$$

5.1 Montrons que f admet un prolongement continue en zéro (on le note encore f) ?
5.2. Ce prolongement est il dérivable en zéro ?

Réponse :
5.1. Si $x \neq 0$ alors $0 \leq |f(x)| = \left|x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right|$ car $\sin \leq 1$
Donc par encadrement, $f(x) \xrightarrow[x\neq 0]{x\to O} 0$ (limite pointée)
D'où le prolongement continue en zéro obtenu en posant $f(0) = 0$

5.2.Soit $x \neq 0$. On pose :

$$\tau_0(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} \qquad \text{car } f(0) = 0$$

$\tau_0(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite en 0^+ (serpent frénétique).
Donc f n'est pas dérivable en zéro.

3. Montrer que si f est dérivable en a, alors f continue en a.

Théorème

Si f est dérivable en a alors f est continue en a (sans réciproque)

Preuve :
(identité de la derivée) $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)\varepsilon(x)$ où $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$
Donc $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} f(a)$ i.e. f est continue mais pas dérivable en a.

4. Définir $C^1(I,\mathbb{R})$, $\Delta^2(I,\mathbb{R})$, $C^2(I,\mathbb{R})$ puis, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\Delta^n(I,\mathbb{R})$, $C^n(I,\mathbb{R})$ et $C^\infty(I,\mathbb{R})$

Définition

On dit que f est de classe C^0 sur I lorsque f est continue sur I

Définition

On dit que f est Δ^1 sur I lorsque f est dérivable sur I

Définition

On dit que f est de classe C^1 sur I lorsque f est dérivable sur I et f' est continue sur I

Définition

On dit que f est Δ^2 sur I lorsque f est dérivable, et f' est aussi dérivable sur I

Définition

On dit que f est de classe C^2, lorsque f est deux fois dérivable et f'' est continue.

Définition

On dit que f est de classe C^n sur I lorsque f est n fois dérivable et f^n est continue sur I.

Définition

On dit que f est de classe C^∞ lorsque f est infiniment dérivable.

Définition

On dit que f est Δ^n sur I lorsque f est n fois dérivable sur I On note alors $f \in \Delta^2(I;\mathbb{R})$

5. SAVOIR REFAIRE : soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} x^2\sin(\frac{1}{x}) & \textbf{si } x \neq 0 \\ 0 & \textbf{si } x = 0 \end{cases}$ Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.La fonction f' est elle continue en zéro ?

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = \begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{2}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} \end{array}$

1. Montrons que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Montrons que f' n'est pas continue en zéro.

Réponse :

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ par produit et composition.

Montrons que f est dérivable en zéro. Si $x = 0$, on note :

$$\begin{aligned}\tau_0(x) &= \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \\ &= \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x - 0} \\ &= x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\end{aligned}$$

$0 \leq \tau_0(x) \leq x$ car $|\sin| \leq 1$
Donc par encadrement $\tau_0(x) \xrightarrow[x \to \dot{0}]{} 0$
Ainsi f est dérivable en zéro et $f'(0) = 0$

Conclusion : f est dérivable sur $\mathbb{R}$, D'où $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

2. Calculons $f'(x)$ pour $x \neq 0$

$$\begin{aligned}f'(x) &= 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \times \left(\frac{-1}{x^2}\right) \cos\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\end{aligned}$$

Remarque : par somme, produit, composition, f' est dérivable sur $\mathbb{R}^*$
Cependant on a vu que $x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow[x \to \dot{0}]{} 0$ mais $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite en zéro
Ainsi f' n'a pas de limite en zéro.
En particulier f' n'est pas continue en zéro.

6. Énoncer la formule de Leibniz. Et donner la dérivée $k^{\text{ième}}$ d'un polynôme de degré n pour $k \geq n$

Théorème (Formule de Leibniz)

Soit f et g dans $\Delta^n(I, \mathbb{R})$(où $n \in \mathbb{N}$).
On adopte la convention $f^{(0)} = f$ et $g^{(0)} = g$
Alors

$$(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} f^{(k)} \times g^{(n-k)}$$

Lemme

La dérvée $k^{\text{ième}}$ de $\varphi : x \mapsto x^n$ (n $\in \mathbb{N}$)
Si $k > n$ alors, $\varphi^{(k)} = 0$
Si $0 \leq k < n$, alors $\varphi^{(k)} = \dfrac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}$

Lemme (bis)

Si P est un polynômes de degrés $n \in \mathbb{N}$.
Alors $\forall k > n$, $P^{(k)} = 0$ et $P^{(n)}$ est une constante.

7. Soit $f : I \to J$ bijective et continue. Soit $b \in J$. A quelle condition sur b la réciproque de f est-elle dérivable en b ? Préciser dans ce cas $(f^{-1})'(b)$

Théorème

Soit $f : I \to J$ bijective et continue,
Soient $a \in I$ et $b \in J$ tq f est dérivable en a
Ainsi :
1.f^{-1} est dérivable en $f(a)$ ssi $f'(a) \neq 0$.
2.Et si c'est le cas, on a en posant $f(a) = b$

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'[f^{-1}]}$$

8. Interrogation sur la feuille "dérivées usuelles".

Fonctions	$\mathscr{D}_f$	Dérivée	$\mathscr{D}_{f'}$
$x^n (n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$x^\alpha (\alpha \in \mathbb{R}^*)$	$\mathbb{R}_+^*$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\frac{1}{x^n} (n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}^*$	$\frac{-n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x	$\mathbb{R}$
$\ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\tan(x)$	$\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\}$	$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\}$
$\arcsin(x)$	$[-1; 1]$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1; 1[$
$\arccos(x)$	$[-1; 1]$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1; 1[$
$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$
$sh(x)$	$\mathbb{R}$	$ch(x)$	$\mathbb{R}$
$ch(x)$	$\mathbb{R}$	$sh(x)$	$\mathbb{R}$
$th(x)$	$\mathbb{R}$	$1 - th^2(x) = \frac{1}{ch^2(x)}$	$\mathbb{R}$

9. SAVOIR REFAIRE : énoncer et prouvé les deux théorèmes de Rolle. Dans quelles circonstances ces théorèmes sont-ils utiles ?

Théorème (Rolle A)

Si $f : I \to \mathbb{R}$ et si $a \in \mathring{I}$, a est dans l'intervalle de I i.e. a n'est pas au bord de I.
Si f est dérivable en a et présente en a un extremum local alors $f'(a) = 0$

Preuve :
Supposons que f admet en $a \in \overset{\circ}{I}$ un maximum local .
a étant intérieur, on dispose de $\alpha > 0$ tq $[a-\alpha; a+\alpha] \subset I$ et $\forall x \in [a-\alpha; a+\alpha], f(x) \leq f(a)$
Soit $x \in [a-\alpha; a+\alpha]$, $x \neq a$
On pose $\tau_a(x) = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$
Si $a-\alpha \leq x < a$, alors $x-a<0$ et $f(x)-f(a) \leq 0$, donc $\tau_a(x) \geq 0$
Or, f étant dérivable en a, $\tau_a(x) \xrightarrow[x \to a^-]{} f'(a)$
Donc par passage à la limite $f'(a) \geq 0$
Si $a < x \leq a+x$, $x-a>0$ et $f(x)-f(a) \leq 0$, donc $\tau_a(x) \leq 0$
Or, $\tau_a(x) \xrightarrow[x \to a^+]{} f'(a)$
Ainsi $f'(a) \leq 0$
Conclusion : $f'(a) = 0$

Théorème (Rolle B)

Soit $a < b$ dans $\mathbb{R}$ et $f \in C^0([a;b], \mathbb{R}) \cap \Delta^1(]a;b[, \mathbb{R})$
Si $f(a) = f(b)$, alors $\exists c \in]a;b[$ tq $f'(c) = 0$

Preuve :
Par hypothèse f est continue sur le segment $[a;b]$.
Donc (cf cours continuité), elle est bornée et elle atteint ses bornes.
On note donc $M = \max\limits_{[a;b]}(f)$ et $m = \min\limits_{[a;b]}(f)$
D'où c_1 et c_2 dans $[a;b]$ tq $M = f(c_1)$ et $m = f(c_2)$
Si $M = m$, alors f est constante sur $[a;b]$, donc f' est nulle sur $[a;b]$
On choisit $c = \dfrac{a+b}{2} \in]a;b[$. $(f'(c) = 0)$

Si $M \neq m$, alors M ou m est différent de $f(a)$
Par exemple $M \neq f(a)$(et donc $m \neq f(b)$)
Donc $c_1 \neq a$ et $c_1 \neq b$
Donc f présente en c_1 un maximum (global) avec $c_1 \in]a;b[$
On peut alors appliquer Rolle A.
Ainsi $f'(c_1) = 0$

10. SAVOIR REFAIRE : énoncé et prouvé le théorème des accroissements finis. Donner l'inégalité en corollaire.

Théorème

Soient $a < b$ dans $\mathbb{R}$ et $f \in C^0([a;b], \mathbb{R}) \cap \Delta^1(]a;b[, \mathbb{R})$
Alors $\exists c \in]a;b[$ tq $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$

Preuve :
On pose une fonction auxiliaire $\varphi : \begin{array}{ccc} [a;b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) - \left(\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)x \end{array}$

$\varphi \in C^0([a;b], \mathbb{R}) \cap \Delta^1(]a;b[, \mathbb{R})$
$\varphi(a) = f(a) - a\left(\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)$
$\varphi(b) = f(b) - b\left(\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)$

$\varphi(b) - \varphi(a) = f(a) - f(b) - \left(\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}\right)(b - a) = 0$
Donc $\varphi(a) = \varphi(b)$
D'après le théorème de Rolle B, $\exists c \in]a; b[$, $\varphi'(c) = 0$
i.e. $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$
i.e. $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$

Corollaire (même hypothése)

Si f' est bornée sur $]a; b[$, on envisage alors
$||f'||_\infty = \sup\{|f(x)|/x \in]a; b[\}$
alors $|f(b) - f(a)| \leq ||f'||_\infty |b - a|$

11. Comment montrer qu'une fonction dérivable est lipschitzienne ?

Corollaire

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in \Delta^1(I, \mathbb{R})$
Supposons que f' est bornée sur I par $K > 0$ (i.e. $\forall x \in I; |f'(x)| \leq K$)
Alors f est $K-$lipschitzienne sur I i.e. $\forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$

Remarque : Si $f \in C^1([a; b]; \mathbb{R})$ alors f' est continue sur le segment $[a; b]$, elle est donc bornée.
Ainsi toute fonction C^1 sur un segment est K-lipschitzienne.

12. SAVOIR REFAIRE : énoncé et prouvé le théorème donnant le sens de variation d'une fonction selon le signe de la dérivée. Donner une CNS pour une stricte monotonie.

Théorème

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide et $f \in \Delta^1(I, \mathbb{R})$ tq $f' \geq 0$ sur I
Alors :
1. f est croissante sur I
2. f est strictement croissante sur I ssi f' ne s'annule sur aucune "véritble" intervalle de I (i.e. d'intérieur non vide).

Preuve :
1. Soient $x \leq y$ dans I
D'où d'après le théorème des acroissements finis, $c \in]x; y[$ tq

$$f(y) - f(x) = \underbrace{f'(c)}_{=0}\underbrace{(y - x)}_{=0}$$

Donc $f(x) \leq f(y)$

2. f est croissante.
f n'est pas strictement croissante ssi il existe $x < y$ dans I tq $f(x) = f(y =$ i.e. f est constante sur $[x; y]$
Selon le théorème suivant, cela signifie qu'il existe $x < y$ tq f' est nulle sur $[x; y]$

13. Énoncer le théorème de conditions suffisante de dérivabilité.

Théorème (de la limite de la dérivé)

Soient $a < b$ dans $\mathbb{R}$ et $f \in C^0([a;b],\mathbb{R}) \cap \Delta^1(]a;b[,\mathbb{R})$
1. On suppose $f'(x) \xrightarrow[x\to a^+]{} \ell \in \mathbb{R}$
Alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$
2. On suppose $|f'(x)| \xrightarrow[x\to a^+]{} +\infty$
Alors f n'est pas dérivable en a et on a une tangente verticale en a.

14. SAVOIR REFAIRE : soit (u_n) la suite récurrente définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}\arctan(u_n)$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 2^{-n}$

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{2}\arctan(x) \end{array}$
Si $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}$
Donc $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ $(K = \frac{1}{2} < 1)$
D'après le Théorème d'accroissement finis
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}(x-y)$
Point fixe : $l = 0$ $(\arctan(0) = 0)$
Montrons que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
Soit $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - 0| = |f(u_n) - f(0)| \leq \frac{1}{2}|u_n - 0|$
Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|u_n|$
... aqt ... $|u_n| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0|$
Donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ à une vitesse au moins géométrique.