I) Auto-test : Intégration

1. Donner les primitives des fonctions suivantes : $t \mapsto te^{-t^2}, t \mapsto \dfrac{t^2}{1+t^2}, t \mapsto \dfrac{1}{t+t(\ln(t))^2}, t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t}$, $t \mapsto \dfrac{t}{(1+2t)^3}, t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}+t}, t \mapsto \dfrac{\sin(2t)}{1+\cos^2(t)}, t \mapsto \dfrac{\text{ch}(\tan(t))}{\cos^2(t)}, t \mapsto \dfrac{(\ln(t))^2}{t}, t \mapsto \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}, t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{(2+\cos(t)^4)}$, $t \mapsto \dfrac{\ln(\ln(t))}{t}$

1. $f(t) = te^{-t^2} = \dfrac{-2te^{-t^2}}{-2}$
Primitive : $F(t) = -\dfrac{1}{2}e^{-t^2} + k$

2. $f(t) = \dfrac{t^2}{1+t^2} = \dfrac{t^2+1-1}{1+t^2} = 1 - \dfrac{1}{1+t^2}$
Primitive : $F(t) = t - \arctan(t) + k$

3. $f(t) = \dfrac{1}{t+t(\ln(t))^2} = \dfrac{1}{t} \times \dfrac{1}{1+(\ln(t))^2}$
Primitive : $F(t) = \arctan(\ln(t)) + k$

4. $f(t) = \dfrac{\ln(t)}{t}$
Primitive : $F(t) = \dfrac{1}{2}(\ln(t))^2$

5. $f(t) = \dfrac{t}{(1+2t)^3} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2t+1-1}{(1+2t)^3}\right) = \dfrac{1}{4}\left[\dfrac{2}{(1+2t)} - \dfrac{2}{(1+2t)^3}\right]$
Primitive : $F(t) = \dfrac{1}{4}\left[\dfrac{-1}{(1+2t)} + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(1+2t)^2}\right] + \text{k}$

6. $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}+t} = \dfrac{2}{2\sqrt{t}}\dfrac{1}{(1+\sqrt{t})}$
Primitive $= F(t) = 2\ln(1+\sqrt{t}) + k$

7. $f(t) = \dfrac{\sin(2t)}{1+\cos^2(t)} = \dfrac{2\sin(t)\cos(t)}{1+\cos^2(t)}$
Primitive : $F(t) = -\ln(1+\cos^2(t)) + k$

8. $f(t) = \dfrac{ch(\tan(t))}{\cos^2(t)}$
Primitive : $sh(\tan(t)) + k$

9. $f(t) = \dfrac{(\ln(t)^2}{t}$
Primitive : $F(t) = \dfrac{(\ln(t))^3}{3} + k$

10. $f(t) = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}} = \dfrac{2t}{2\sqrt{1+t^2}}$
Primitive : $F(t) = \sqrt{1+t^2} + k$

11. $f(t) = \dfrac{\sin(t)}{(2+\cos(t))^4}$
Primitive : $F(t) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{(2+\cos(t))^3} + k$

12. $f(t) = \dfrac{\ln(\ln(t))}{t}$
Primitive : $F(t) = (\ln(t))\ln(\ln(t)) - \ln(t) + k$

2. Donner la définition d'une fonction en escaliers, d'une fonction continue par morceaux, et d'une fonction réglée sur un intervalle $[a, b]$ (où $a < b$).

Définition (fonction en escaliers)

Soient $a < b$ dans $\mathbb{R}$
1. On appelle subdivision de $[a, b]$ un ensemble $s = \{x_0, ..., x_n\}$ tel que $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$
2. Si $f \in \mathcal{F}([a, b]; \mathbb{R})$ on dit que f est en escalier sur $[a, b]$ ssi il existe une subdivision s de $[a, b]$ telle que $\forall k \in [\![1, n]\!]$, f est constante sur $]x_k, x_{k+1}[$.
On dit alors qu'une telle subdivision s est adapté à f.
On note $\mathscr{E}([a, b], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a, b]$

Définition (fonction réglée sur $[a, b]$)

On dit $f \in \mathcal{F}([a, b], \mathbb{R})$ est réglée lorsque :

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des fonctions φ, ψ dans $\mathscr{E}([a, b], \mathbb{R})$ (en escalier) tq $\begin{cases} \varphi \leq f \leq \psi \text{ sur } I \\ \psi - \varphi \leq \varepsilon \text{ sur } I \end{cases}$

Définition (fonctions continues par morceaux)

On dit que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue par morceaux sur $[a, b]$ (en abrège $C^0 - PM$) lorsqu'il existe $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ (subdivision) et tq pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $f|_{]x_k;x_{k+1}[}$ (restriction) est continue et prolongeable par continuité en x_k et en x_{k+1}

3. SAVOIR REFAIRE : soient $a < b$ dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'une fonction f continue sur $[a, b]$ est réglée (i.e. pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des fonction φ et ψ en escaliers telles que $\varphi \leq f \leq \psi$ avec $0 \leq \psi - \varphi \leq \varepsilon$ uniformément sur $[a, b]$)

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
Montrons que f est réglée.

Soit $\varepsilon > 0$
Clef : f est continue sur le segment $[a, b]$ donc d'après le théorème de HEINE, elle est uniformément continue i.e. $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (x, y) \in [a, b]^2, |x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$
d'où un certain δ tq $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (x, y) \in [a, b]^2, |x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ soit satisfait.
On découpe $[a, b]$ en tranches $\leq \delta$:
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tq $\dfrac{b-a}{n} \leq \delta$ (OK car $\dfrac{b-a}{n} \xrightarrow[x \to +\infty]{} b$)
On pose $x_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$ ainsi $x_0 = a < x_1 = a + \frac{b-a}{n} < ... < x_n = a + \frac{n(b-a)}{n} = b$
$j = (x_0, ..., x_n)$ est une subdivision de $[a, b]$ tq par construction $x_{k+1} - x_k = \frac{(b-a)}{n}$
On définit $\psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ tq sur $[x_k, x_{k+1}[$, ψ est constante égale au $\max\limits_{[x_k, x_{k+1}]}(f) = f(\alpha k)$ où $\alpha k \in [x_k, x_{k+1}]$ et on pose $\psi(b) = \psi(x_n - 1)$
Ainsi ψ est en escalier et $f \leq \psi$ sur $[a, b]$
De même on définit $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ tq φ est constante sur $[x_k, x_{k+1}[$ égale au $\min\limits_{[x_k, x_{k+1}]}(f) = f(\beta k)$ tq $\beta k \in [x_k, x_{k+1}]$ et on pose $\varphi(b) = \varphi(x_n - 1)$
Ainsi φ est en escalier et $\varphi \leq f$ sur $[a, b]$
Enfin d'après $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (x, y) \in [a, b]^2, |x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$, si $x \in [a, b]$ alors il existe $k \in [\![0, n-1]\!]$

tq $x \in [x_k, x_{k+1}[$
Donc $|\psi(x) - \varphi(x)| = |f(\alpha k) - f(\beta k)|$
Or αk et βk sont dans $[x_k, x_{k+1}[$
Donc $|\alpha k - \beta k| \leq \delta$. Donc d'après $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (x,y) \in [a,b]^2, |x-y| \leq \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$ $|f(\alpha k) - f(\beta k)| \leq \varepsilon$
i.e. $|\varphi(x) - \psi(x)| \leq \varepsilon$

Bilan : Pour tout $\varepsilon > 0$, on a construit φ et ψ en escalier tq $\begin{cases} \varphi \leq f \leq \psi \\ |\psi - \varphi| \leq \varepsilon \end{cases}$
Conclusion : f est une fonction réglée sur $[a;b]$

4. Donner la définition d'une fonction Riemann-intégrable.

Définition :
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction quelconque. On définit les ensembles suivants :
$\mathscr{E}_-(f) = \{\varphi \in \mathscr{E}([a,b], \mathbb{R}) / \varphi \leq f \text{ sur } [a,b]\}$
$\mathscr{E}_+(f) = \{\psi \in \mathscr{E}([a,b], \mathbb{R}) / f \leq \psi \text{ sur } [a,b]\}$
$\mathscr{I}_-(f) = \{\int_a^b \varphi / \varphi \in \mathscr{E}_-(f)\}$
$\mathscr{I}_+(f) = \{\int_a^b \psi / \psi \in \mathscr{E}_+(f)\}$
On dit que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est (Riemann) intégrable sur $[a,b]$ lorsque f est bornée, lorsque $\sup(\mathscr{I}_-(f)) = \inf(\mathscr{I}_+(f))$
Si c'est le cas, on définit alors l'intégrale de Riemann de f sur $[a,b]$:

$$\int_a^b f = \sup(\mathscr{I}_-(f)) = \inf(\mathscr{I}_+(f))$$

5. Donner les 4 propriétés fondamentales de l'intégrales. Si f est Riemann intégrable, donner une estimation grossière de $\int_a^b f(t)dt$.

Théorème

Soient $a < b$, f et g des fonction (Riemann) intégrable sur $[a,b]$.
Alors :
1. Linéarité : $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \lambda f + \mu g$ est aussi intégrable et $\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$
2. Positivité/croissante :
Si $f \geq 0$ sur $[a,b]$, alors $\int_a^b f \geq 0$
Si $f \leq g$ sur $[a,b]$, alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g$
3. Inégalité triangulaire : $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$
4. Chasles : Si $c \in]a,b[$ alors $f|_{[a,c]}$ et $f|_{[c;b]}$ (restrictions) sont intégrables et $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

Corollaire (Estimation grossière)

Si f est intégrable sur $[a,b]$ alors f est bornée et $\int_a^b |f| \leq ||f||_\infty (b-a)$

6. SAVOIR REFAIRE : Si f est continue est positive et si $\int_a^b f = 0$, alors $f = 0$ sur $[a, b]$

Théorème

Si f est continue et positive sur $[a, b]$
Alors $\left(\int_a^b f = 0\right) \Rightarrow (f$ est nulle sur $[a, b])$

Preuve :
Soit f positive sur $[a, b]$
On suppose que f n'est pas nulle sur $[a, b]$ i.e. $\exists x_0 \in [a, b], f(x_0) > 0$
Montrons que $\int_a^b f \neq 0$
Continuité en $x_0, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in [a, b], |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$
On choisit $\varepsilon = \dfrac{f(x_0)}{2} > 0$
D'où un certains $\delta > 0$ tq $\forall x \in [a, b]$, si $|x - x_0 \leq \delta|$ alors $f(x_0) - \varepsilon \leq f(x)$ et donc $f(x) \geq \dfrac{f(x_0)}{2}$
D'après Chasles : $\displaystyle\int_a^b f = \underbrace{\int_a^{x_0-\delta} f}_{\geq 0} + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f + \underbrace{\int_{x_0+\delta}^b f}_{\geq 0}$ par positivité de l'intégrale

($f \geq 0$ par hypothése)
Donc $\displaystyle\int_a^b f \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f$
Or $\forall t \in [x_0 - \delta; x_0 + \delta], f(t) \geq \dfrac{f(x_0)}{2}$
On intègre cette inégalité

$$\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{f(x_0)}{2} dt = 2\delta \times \frac{f(x_0)}{2} = \underbrace{\delta f(x_0)}_{>0}$$

Ainsi $\displaystyle\int_a^b f > 0$ (donc non nul). D'où le résultat.

7. SAVOIR REFAIRE : énoncer et prouver l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les intégrales.

Théorème (inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soient f et g des fonctions Riemann intébrable sur $[a, b]$
Alors

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)dt\right| \leq \sqrt{\int_a^b f(t)^2 dt} \times \sqrt{\int_a^b g(t)^2 dt}$$

Preuve :
On introduit un paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$
J'envisage $p(\lambda) = \displaystyle\int_a^b \underbrace{(\lambda f(t) + g(t))^2}_{\geq 0} dt$
Par positivité de l'intégrale : $\forall \lambda \in \mathbb{R}, p(\lambda) \geq 0$
On développe le carré

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, p(\lambda) = \int_a^b \lambda^2 f(t)^2 + 2\lambda f(t)g(t) + g(t)^2 dt$$

Par linéarité :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, p(\lambda) = \lambda^2 \left(\int_a^b f^2\right) + 2\lambda \left(\int_a^b fg\right) + \left(g^2\right)$$

En tant que fonction de la variable λ, p est un polynôme de degrés inférieur ou égale à deux.

1er cas : si $\displaystyle\int_a^b f^2 = 0$, alors p est un polynôme de degrés inférieur ou égale à un i.e. une fonction affine, qui est positive sur $\mathbb{R}$ tout entier.
p est donc une constante.

(EXO : Si $p : \lambda \mapsto A\lambda + B$ examiner les limites en $\pm\infty$, pour prouver que $A =$)

Donc $\displaystyle\int_a^b fg = 0$
Ainsi $\displaystyle\int_a^b fg = 0$ et $f^2 = 0$, donc l'inégalité revient à prouver que $0 \leq 0$

2nd cas : si $\int_a^b f^2 \neq 0$, donc $d^0 P = 2$
$P(\lambda) = A\lambda^2 + B\lambda^2 + C$ avec $A \geq 0$ et $P \geq 0$ sur $\mathbb{R}$
Donc son discriminant Δ est ≤ 0
Or ici $\Delta = B^2 - 4AC = 4\left(\displaystyle\int_a^b fg\right)^2 - 4\left(\displaystyle\int_a^b f^2\right) \times \left(\displaystyle\int_a^b g^2\right) \leq 0$
$\sqrt{\bullet}$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)dt\right| \leq \sqrt{\int_a^b f(t)^2 dt} \times \sqrt{\int_a^b g(t)^2 dt}$$

8. SAVOIR REFAIRE : Intégrale et primitive. Soit f une fonction Riemann-intégrable sur $[a,b]$. On pose pour $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$. Que dire de plus si f est continue ? Faire la preuve.

Théorème (fondamentale de l'analyse)

On supposque que f est Riemann intégrable sur $[a,b]$. Alors :
1. F est lipschitzienne sur $[a,b]$
2. Si f est continue sur $[a,b]$, alors F est de classe C^1 sur $[a,b]$ et $F' = f$
Plus précisement F est la primitive de f qui s'annule en x_0 (i.e. $F(x_0) = 0$)

Preuve :
$F(x) = \displaystyle\int_{x_0}^x f(t)dt$
1. Hypothése : f est intégrable (donc bornée)
Montrons que F est lipschitzienne sur $[a,b]$
On se donne x et y dans $[a,b]$

$$\begin{aligned} F(x) - F(y) &= \int_{x_0}^x f(t)dt - \int_{x_0}^y f(t)dt \\ &= \int_{x_0}^x f(t)dt + \int_y^{x_0} f(t)dt \\ &= \int_y^x f(t)dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |F(x)-F(y)| = \left|\int_y^x f\right| &\leq \left|\int_y^x |f|\right| \\ &\leq \left|\int_y^x ||f||_\infty\right| = ||f||_\infty |x-y| \end{aligned}$$

Ainsi F est $||f||_{/infty}$-lipschitzienne sur $[a,b]$

2. Supposons de plus que f est continue.
Montrons que F est C^1 sur $[a,b]$ et $F' = f$
Soit $\omega \in [a,b]$. Montrons que F est dérivable en ω et que $F'(\omega) = f(\omega)$
On pose pour h suffisament proche de zero.

$$\tau_\omega(h) = \frac{F(\omega+h)-F(\omega)}{h}$$

Montrons que $\tau_\omega(h) \xrightarrow[h\to\dot{0}]{} f(\omega)$
D'après le 1., $\tau_\omega(h) = \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_\omega^{\omega+h} f(t)dt$
$f(\omega) = \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_\omega^{\omega+h} f(\omega)dt$
Ainsi

$$\begin{aligned} \tau_\omega(h) - f(\omega) &= \frac{1}{h}\int_\omega^{\omega+h} f(t)dt - \frac{1}{h}\int_\omega^{\omega+h} f(\omega)dt \\ &= \frac{1}{h}\int_\omega^{\omega+h} \left[f(t)-f(\omega)\right] dt \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$, f est continue en ω, d'où un certain $\delta > 0$ tq $\forall t \in [\omega-\delta;\omega+\delta], |f(t)-f(\omega)| \leq \varepsilon$
On suppose que $|h| \leq \delta$
Alors $\forall t \in [\omega;\omega+h], |f(t)-f(\omega)| \leq \varepsilon$, donc $|\tau_\omega|(h) - f(\omega) \leq \dfrac{1}{|h|}\left|\displaystyle\int_\omega^{\omega+h} |f(t)-f(\omega)|\right|$
donc $|\tau_\omega(h) - f(\omega)| \leq \dfrac{1}{|h|}\varepsilon\left|\underbrace{\displaystyle\int_\omega^{\omega+h} 1dt}_{=h}\right|$
Bilan : $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall h \in \mathbb{R}, (|h| \leq \delta) \Rightarrow (|\tau_\omega(h) - f(\omega)|) \leq \varepsilon$ i.e. $\tau_\omega(h) \xrightarrow[h\to\dot{0}]{} f(\omega)$
Ainsi F est dérivable en ω et $F'(\omega) = f(\omega)$
Ainsi $F \in \Delta^1([a,b],\mathbb{R})$ et $F' = f$
Or f est continue, donc F' est continue.
Donc F est dans C^1

9. Primitives usuelles

Fonctions f	Primitives $F, k \in \mathbb{R}$	Intervalle de définition I
$x^n (n \in \mathbb{Z}\backslash\{-1\})$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + k$	si $n \geq 0 : \mathbb{R}$, si $n \leq -2 : \mathbb{R}^*$
$\frac{1}{x}$	$\ln(\|x\|) + k$	$\mathbb{R}^*$
$x^\alpha (\alpha \neq -1)$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + k$	$\mathbb{R}_+^*$
e^x	$e^x + k$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + k$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x) + k$	$\mathbb{R}$
$\tan(x)$	$-\ln(\|\cos(x)\|) + k$	$\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\}$
$\frac{1}{\cos^2(x)}$ ou $1 + \tan^2(x)$	$\tan(x) + k$	$\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\}$
$\frac{1}{\sin^2(x)}$	$-\frac{\cos(x)}{\sin(x)} + k$	$\mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$
$sh(x)$	$ch(x) + k$	$\mathbb{R}$
$ch(x)$	$sh(x) + k$	$\mathbb{R}$
$th(x)$	$\ln(ch(x)) + k$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{ch^2(x)}$ ou $1 - th^2(x)$	$th(x) + k$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{sh^2(x)}$	$-\frac{ch(x)}{sh(x)} + k$	$\mathbb{R}^*$
$\ln(x)$	$x\ln(x) - x + k$	$\mathbb{R}_+^*$
$\frac{1}{1+x^2}$	$Arctan(x) + k$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\frac{1}{2}\ln\left(\left\|\frac{1+x}{1-x}\right\|\right) + k$	$\mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$Arcsin(x) + k$ ou $-Arccos(x) + k$	$]-1;1[$
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\ln(x + \sqrt{1+x^2}) + k$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\ln(\|x + \sqrt{x^2-1}\|) + k$	$]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+h}}$	$\ln(\|x + \sqrt{x^2+h}\|) + k$	selon h
$\frac{1}{ax+b} (a \neq 0)$	$\frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + k$	$\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{-b}{a}\right\}$

Fonctions f	Primitives $F, k \in \mathbb{R}$
$u' \times u^n$	$\frac{u^{n+1}}{n+1} + k$
$\frac{-u'}{u^2}$	$\frac{1}{u} + k$
$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u} + k$
$\frac{u'}{u}$	$\ln(\|u\|) + k$
$u'e^u$	$e^u + k$
$u' \sin(u)$	$-\cos(u) + k$
$u' \cos(u)$	$\sin(u) + k$
$\frac{u'}{\cos^2(u)}$ ou $u'(1 + \tan(u))$	$\tan(u) + k$
$u'sh(x)$	$ch(u) + k$
$u'ch(x)$	$sh(u) + k$
$\frac{u'}{1+u^2}$	$arctan(u) + k$
$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$arcsin(u) + k$
$\frac{u'}{ch^2(u)}$ ou $u'(1 + th(u))$	$th(u) + k$

10.SAVOIRE REFAIRE : énoncer et prouver le théorème de changement de variable pour les intégrales

Théorème

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue (où I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ non vide).
$\varphi : J \to \mathbb{R}$ de classe C^1 tq $\varphi(J) \subset I$
Alors, pour α, β dans I on a

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx$$

Preuve :
Soit F une primitive de f sur I.
Je pose $G = F \circ \varphi$, ainsi G est de classe C^1, et si $t \in I$ alors $G'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f[\varphi(t)] \times \varphi(t)$
Donc

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt &= \int_\alpha^\beta G'(t)dt \\ &= [G(t)]_\alpha^\beta \\ &= F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)]\end{aligned}$$

On choisit $F(y) = \displaystyle\int_{\varphi(\alpha)}^{y} f(t)dt$

Ainsi $F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = \displaystyle\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)dt$

11. Intégrale et parité (énoncé et preuve). Que dire de l'intégrale d'une fonction paire ? impaire ?

Corollaire (parité)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et $a \in \mathbb{R}$
Alors :
1. Si f est paire $\displaystyle\int_{-a}^{a} f = 2\int_{0}^{a} f$
2. Si f est impaire $\displaystyle\int_{-a}^{a} f = 0$

Preuve :
On effectue le changement de variable $t = -x$, "$dt = -dx$"
Soit $I = \displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{a}^{-a} f(-t)(-dt) = \int_{-a}^{a} f(-t)dt$
Si f est impaire alors $\forall t \in \mathbb{R}, f(-t) = -f(t)$
Donc $I = \displaystyle\int_{-a}^{a} -f(t)dt = -I$ i.e. $2I : 0$ donc $I = 0$
Si f est paire, alors $\forall t \in \mathbb{R}, f(-t) = f(t)$
Chasles : $\displaystyle\int_{-a}^{a} f = \int_{-a}^{0} f + \int_{0}^{a} f$
Donc il suffit de montrer que $\displaystyle\int_{-a}^{0} f = \int_{0}^{a} f$ Or

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^{0} f &= \int_{a}^{0} f(-x)(-dx) \\
&= \int_{0}^{a} f(-x)dx \\
&= \int_{0}^{a} f(x)dx
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

12. Intégrale et périodicité (énoncé et preuve).

Corollaire (périodicité)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et T-périodique (où $T \in \mathbb{R}^*$)
Alors, $\forall a \in \mathbb{R}, \int_{a}^{a+T} = \int_{0}^{T} f$

Preuve :
Chasles : $\displaystyle\int_{a}^{a+T} = \underbrace{\int_{a}^{0} f + \int_{T}^{a+T} f}_{\text{se neutralise}} + \int_{0}^{T} f$
On pose $x = t + T$, "$dx = dt$"

$$\int_{T}^{a+T} f(x)dx = \int_{0}^{a} \underbrace{f(t+T)}_{=f(t) \text{ car } f \text{ est } T-\text{périodique}} dt = \int_{0}^{a} f$$

13. SAVOIR REFAIRE : intégration par parties énoncé et preuve.

Théorème

Soient u et v de classe C^1 de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$
Alors $\displaystyle\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$

Preuve :

$$\begin{aligned}\int_a^b u'v + \int_a^b uv' &= \int_a^b u'v + uv' \\ &= \int_a^b (uv)' \\ &= [uv]_a^b\end{aligned}$$

14. SAVOIR REFAIRE : énoncer et prouvé le théorème de Riemann-Lebesgue pour les fonction de classe C^1

Théorème (de Riemann-Lebesgue)

Soit $f \in C^1([a,b],\mathbb{R})$, $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_a^b e^{int} f(t)dt$
Alors $I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Preuve :

$$I_n = \int_a^b e^{int} f(t)dt = \underbrace{\left[\frac{1}{in} e^{int} f(t)\right]_a^b}_{\text{noté } \alpha_n} - \underbrace{\int_a^b \frac{1}{in} e^{int} f'(t)dt}_{\text{noté } \beta_n}$$

$$\alpha_n = \frac{1}{in}\left[e^{inb} f(b) - e^{ina} f(a)\right]$$

$|\alpha_n| \leq \dfrac{1}{|in|}(|e^{inb} f(b)| + |e^{ina} f(a)|)$ par inégalité triangulaire
Or $\forall \theta \in \mathbb{R}, |e^{i\theta}| = 1$
Donc $|\alpha_n| \leq \dfrac{1}{n}(|f(b)| + |f(a)|)$, donc par encadrement $\alpha_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
Par ailleur $|\beta_n| = \left|\dfrac{1}{in}\displaystyle\int_a^b e^{int} f'(t)dt\right| \leq \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_a^b |e^{int} f'(t)|dt$
Donc $0 \leq \beta_n \leq \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_a^b |f'| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
Donc par encadrement $\beta_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
Conclusion $I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

15. Énoncer le théorème sur les somme de Riemann sur $[0,1]$, puis sur $[a,b]$ où $a < b$.

Théorème

1. Soit $f \in C^0([a,b],\mathbb{R})$
Alors $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a = k\frac{(b-a)}{n}\right) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f$
2. Si f est de plus lipschitzienne alors l'erreur commise est un $\bigcirc\left(\frac{1}{n}\right)$ lorsque $n \to +\infty$.

16. Comparaison séries/intégrales : montrer que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$ ou $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$ ou $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \underset{+\infty}{\sim} \ln(\ln(n))$

1.

$$\begin{array}{ccccc}
\displaystyle\int_2^{n+1} \frac{dt}{t} & \leq & \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} & \leq & \displaystyle\int_1^{n} \frac{dt}{t} \\
[\ln(t)]_2^{n+1} & \leq & H_n - 1 & \leq & [\ln(t)]_1^n \\
\ln(n+1) - \ln(2) + 1 & \leq & H_n & \leq & \ln(n) - \ln(1) + 1 \\
\dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)} - \dfrac{\ln(2)}{\ln(n)} & \leq & \dfrac{H_n}{\ln(n)} & \leq & 1 + \dfrac{1}{\ln(n)}
\end{array} \qquad (\text{où } H_n = \textstyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k})$$

Or $\frac{\ln(2)}{\ln(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\frac{1}{\ln(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
Ainsi $\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \leq \frac{H_n}{\ln(n)} \leq 1$
Or $\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ car $n+1 \underset{+\infty}{\sim} n$
Donc, par encadrement $\frac{H_n}{\ln(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ i.e. $H_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$

2. $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$

$$\begin{array}{ccccc}
\displaystyle\int_2^{n+1} \frac{dt}{\sqrt{t}} & \leq & S_n - 1 & \leq & \displaystyle\int_1^{n} \frac{dt}{\sqrt{t}} \\
[2\sqrt{t}]_2^{n+1} + 1 & \leq & S_n & \leq & [2\sqrt{t}]_1^n \\
2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{2} + 1 & \leq & S_n & \leq & 2\sqrt{n} - 2\sqrt{1} + 1 \\
\dfrac{2\sqrt{n+1}}{2\sqrt{n}} - \dfrac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{n}} + \dfrac{1}{2\sqrt{n}} & \leq & \dfrac{S_n}{2\sqrt{n}} & \leq & 1 - \frac{1}{2\sqrt{n}}
\end{array}$$

Or $\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\frac{1}{2\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
Ainsi $\sqrt{1+\frac{1}{n}} \leq \frac{S_n}{2\sqrt{n}} \leq 1$
Ainsi par encadrement $\frac{S_n}{2\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ i.e. $S_n \underset{+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$

3.

$$\begin{array}{rcccl}
\displaystyle\int_3^{n+1} \frac{dt}{t\ln(t)} & \leq & \displaystyle\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} & \leq & \displaystyle\int_2^{n} \frac{dt}{\ln(t)} \\
{[\ln(\ln(t))]}_3^{n+1} & \leq & S_n - \dfrac{1}{2\ln(2)} & \leq & {[\ln(\ln(t))]}_2^{n} \\
\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(3)) + \dfrac{1}{2\ln(2)} & \leq & S_n & \leq & \ln(ln(n)) - \ln(\ln(2)) + \dfrac{1}{2\ln(2)} \\
\dfrac{\ln(\ln(n+1))}{\ln(\ln(n))} - \dfrac{cst}{\ln(\ln(n))} & \leq & \dfrac{S_n}{\ln(\ln(n))} & \leq & 1 + \dfrac{cst}{\ln(\ln(n))}
\end{array}$$

Or $\dfrac{cst}{\ln(\ln(n))} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Or $\ln(n+1) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$ ainsi $\ln(\ln(n+1)) \underset{+\infty}{\sim} \ln(\ln(n))$ donc $\dfrac{\ln(\ln(n+1))}{\ln(\ln(n))} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

Donc par encadrement $\dfrac{S_n}{\ln(\ln(n+1))} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc $S_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(\ln(n))$