I) Auto-test : Espaces vectoriels de dimension finie

1. Donner la définition d'un espace vectoriel de dimension finie. Comment définit-on alors la dimension ?

Définition

On dit qu'un K-espace vectoriel E est de dimension fini s'il contient une partie génératrice finie.

Définition

Si E un K-espace vectoriel de dimension finie, on appelle dimension de E le cardinal commun à toutes les bases de E.
O, le note $\dim(E)$ ou $\dim_K(E)$

2. Que dire du cardinal d'une famille libre / génératrice dans un espace vectoriel de dimension finie. Comment montrer qu'une telle famille est une base ?

Théorème

Soit E un K-espace vectoriel de dimension fini $= n \in \mathbb{N}^*$
Alors :
1. Si $(\ell_i)_{i\in I}$ est une famille libre alors $\text{card}(I) \leq n$
1. Si $(g_j)_{j\in J}$ est une famille libre alors $\text{card}(J) \geq n$

Théorème

Soit E un K-espace vectoriel de dimension fini tq $\dim E = n$ $(n \in \mathbb{N})$
Soit $(e_1, ..., e_n)$ une famille de cardinal n
Alors :
1. $(e_1, ..., e_n)$ est libre $\Rightarrow$ $(e_1, ..., e_n)$ est une base
2. 1. $(e_1, ..., e_n)$ est génératrice $\Rightarrow$ $(e_1, ..., e_n)$ est une base

3. Citer le théorème de la base incomplète en dimension finie

Théorème

Soient E un K-espace vectoriel de dimension fini $n \in \mathbb{N}^*$ et $(u_1, ..., u_p)$ une famille libre de E tq $p < n$
Alors il est possible de la completer en une base de E.
Plus précisement si $\{E_i\}_{i\in I}$ est une partie génératrice de E alors il existe $\alpha_{p+1}, ..., \alpha_n$ dans I tq $(u_1, ..., u_p, e_{\alpha_{p+1}}, ..., e_{\alpha_n})$ soit une base de E.

4. Comment montrer en dimension finie que deux sous-espace vectoriel sont égaux ?

Théorème

Soit E un K-espace vectoriel de dimension fini
Alors :
1. Tout sous-espace vectoriel F de E est aussi de dimension fini $\dim F \leq \dim E$
2. Si $\dim E = \dim F$ alors $F = E$

5. Citer le théorème du rang. Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ avec E de dimension finie, que dire de $\dim(f(E))$? Que dire de si f est injective ?

Théorème (du rang)

Soient E et F des K-espace vectoriel, $f \in \mathcal{L}(E, F)$
On suppose que la source E est de dimension fini.
Alors :
1. $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension fini et $\dim(\mathrm{Im}(f)) \leq \dim(E)$
2. $\dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(E)$

Corollaire (1)

Un endomorphisme injectif conserve ses dimensions.

6. SAVOIR REFAIRE : si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ avec $\dim(E) = \dim(F)$, alors f est injective ssi f est surjective ssi f est bijective

Corollaire (2)

Soient E et F dans K-espace vectoriel de dimension fini tq $\dim(E) = \dim(F)$.
Si $F \in \mathcal{L}(E, F)$ alors f injective $\Leftrightarrow$ f surjective.

Preuve :
Supposon que f est injective
donc $\ker(f) = \{0_E\}$
ainsi $\dim(\ker(f)) = 0$
D'après le théorème du rang, $\dim(E) = \dim(\mathrm{Im}(f)) + \underbrace{\dim(\ker(f))}_{=0}$
Or $\dim(E) = \dim(F)$
Ainsi $\Im(f) \subset F$ et $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(F)$ donc $\mathrm{Im}(f) = F$
Donc f est surjective.
Réciproquement, supposons que f est surjective i.e. $\mathrm{Im}(f) = F$
Or d'après le théorème du rang $\dim(E) = \dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\ker(f))$
Donc $\dim(E) = \dim(F) + \dim(\ker(f))$
or $\dim(E) = \dim(F)$
Donc $\dim(\ker(f)) = 0$
Donc $\ker(f) = \{0_E\}$
Donc f est injective.

7. SAVOIR REFAIRE : énoncé et prouver l'égalité de Graussmann.

Théorème (Égalité de Graussmann)

Soient E un K-espace vectoriel de dimension fini, F et G des sous-espca vectoriel de E
Alors $\dim(F+G) = \dim(E) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$

Preuve :

Appliquons le théorème du rang à une application linéaire. Soit $s : \begin{array}{ccc} F \times G & \to & F+G \\ (x;y) & \mapsto & x+y \end{array}$

s est bien linéaire.
J'affirme que f est surjective
En effet tout éléments du but $F+G$ s'écrit $x+y$ avec $x \in F$ et $y \in g$ donc $\mathrm{Im}(s) = F+G$
Déterminons le noyau de s
Soit $(x;y)F \times G$

$$\begin{array}{lll} (x;y) \in \ker(s) & \text{ssi} & s(x,y) = 0_E \\ & \text{ssi} & x+y = 0_E \\ & \text{ssi} & y = -x \end{array}$$

donc $\ker(s) = \{(x; -x/x \in F \cap G)\}$
J'affirme que $\ker(s) \sim F \cap G$

En effet, soit $f : \begin{array}{ccc} F \cap G & \to & \ker(s) \\ x & \mapsto & (x; -x) \end{array}$

f est surjective car $\ker(s) = \{(x; -x/x \in F \cap G)\}$
f est injective, car $\ker(f) = \{0_E\}$, en effet si $f(x) = (0_E, 0_E)$, alors $(x; -x) = (0_E; 0_E)$ donc $x = 0_E$
Donc f est un isomorphisme de $F \cap G$ dans $\ker(s)$
Donc $\dim(\ker(s)) = \dim(f \cap G)$
On applique le théorème du rang à s
$\dim(\ker(s)) + \dim(\mathrm{Im}(s)) = \dim(F \times G)$
i.e. $\dim(F \cap G) + \dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G)$
D'où l'égalité de Grassmann

8. Comment prouver en dimension finie que $E = F \oplus G$ (où F et G sont des H-espace vectoriel de dimension finie)

Corollaire (de Grassmann)

Soient E un K-espace vectoriel de dimension fini, F et G des sous-espace vectoriel de E.

Alors $E = F \oplus G$ ssi $\begin{cases} F \cap G : \{0_E\} \\ \text{et } \dim(F) + \dim(G) = \dim(E) \end{cases}$

9. Donner la définition d'un hyperplan dans un esapce vectoriel de dimension finie, puis donner une définition généralisant les hyperplan en dimension quelconque.

Définition

Soit E un K-espace vectoriel de dimension fini
On appelle hyperplan de E tout sous espace vectoriel de dimension $\dim(E) - 1$

Définition (généralisé)

Soit E un K-espace vectoriel et H un sous-espace vectoriel On dit que H est un hyperplan de E lorsque H admet pour supplémentaire une droite vectoriel

10. Si $f \in \mathcal{L}(E)$, a-t-on toujours $E = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$?

Théorème du rang : $\dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(E)$
D'après l'égalité de Grassmann : $\ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = E$ ssi $\ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_E\}$
Cependant cette contradiction n'est pas toujouts vérifiée.

Contre-exemple : considérons un endomorphisme nilpotent d'ordre 2 i.e. tq $f \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et non nul i.e. $\mathrm{Im}(f) \subset \ker(f)$. Ainsi $\mathrm{Im}(f) \cap \ker(f) = \mathrm{Im}(f) \neq \{0_E\}$

11. Donner $\dim(E \times F)$, $\dim(\mathcal{L}(E))$ et $\dim(E^*)$ si E et F sont des K-espace vectoriel de dimension finie.

$\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F)$, $\dim(\mathcal{L}(E)) = \dim(E)^2$ et $\dim(E^*) = \dim(E) \times \dim(K) = \dim(E)$

12. Donner la définition du rang d'une famille de vecteurs.

Définition

Soient E un K-espace vectoriel, $(a_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E.
On dit que cette famille et de rang fini lorsque $\mathrm{vect}\{a_i / i \in I\}$ est de dimension fini.
On définit alors sont rang

$$\mathrm{rg}(a_i)_{i \in I} = \dim(\mathrm{vect}\{e_i / i \in I\})$$

13. Qu'est ce qu'une application linéaire de rang fini. Définir sont rang. Quel est le rapport avec le rang d'une famille de vecteurs ?

Définition

Soient E et F des K-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E, F)$
On dit que f est de rang fini lorsque $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension fini. On définit alors sont rang par

$$\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f))$$

Théorème (liens avec le rang d'une famille)
Si E est de domension fini et à pour base $(e_1, ..., e_n)$
Alors $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f(e_1), ..., f(e_n))$

14. Donner la définition d'un sous-espace affine d'une espace vectoriel. Qu'appelle-ton sa direction ?

Définition

On appelle sous espace affine de E tout translaté d'un sous-espace vectoriel de E
i.e. $\mathscr{F} \subset E$ est un sous-espace affine de E ssi il existe un sous-espace vectoriel F et un vecteur $a \in E$ tq $\mathscr{F} = t_a(F)$

15. Donner une CNS pour qu'un sous-espace affine soit un sous-esapce vectoriel.

Théorème

1. Si $\mathscr{F}$ est un sous-espace ffine de E, alors il existe un unique sous-espace vectoriel $\overrightarrow{F}$ de E tq $\forall b \in \mathscr{F}$, $\mathscr{F} = t_b(\overrightarrow{F})$. Ce sous-espace vectoriel est appellé la direction de $\mathscr{F}$
2. $\forall (a,b) \in \mathscr{F}^2$, $a - b \in \overrightarrow{F}$
3. $\mathscr{F}$ est un sous-espace vectoriel de E ssi $0_E \in \mathscr{F}$

16. Soit $\varphi : E \to F$ une application linéaire et $b \in F$ fixé. Résoudre l'équation affine $\varphi(x) = b$

Définition

Soient E et F des K-espace vectoriel, $\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$ et $b \in F$.
On dit que l'équation $\varphi(x) = b (\mathscr{E})$ d'inconnu $x \in E$ est une équation affine.

On apelle équation homogéne associé à $(\mathscr{E})$ l'équation $\varphi(x) = 0_F (\mathscr{E}_H)$
notation pour l'enssemble des solution :
- $\mathscr{S}_E = \{x \in E / \varphi(x) = b\}$
- $\mathscr{S}_{EH} = \{x \in E / \varphi(x) = 0_F\}$

Résolution de l'équation affine $(\mathscr{E})$
1$^{\text{er}}$ cas : Si $b \notin \text{Im}(\varphi)$, alors $(\mathscr{E})$ n'admet pas de solution.
2$^{\text{nd}}$ cas : Si $b \in \text{Im}(\varphi)$, alors soit $x \in E$ un antécédent de b par φ i.e. $\varphi(x) = b$
Alors :

$$\begin{aligned}
(\mathscr{E}) &\Leftrightarrow \varphi(x) = \varphi(x_0) \\
&\Leftrightarrow \varphi(x) - \varphi(x_0) = O_F \\
&\Leftrightarrow \varphi(x - x_0) = 0_F \qquad \text{car } \varphi \text{ linéaire} \\
&\Leftrightarrow (x - x_0) \in \ker(\varphi) \\
&\Leftrightarrow x = y + x_0 \text{ ou } y \in \ker(\varphi) \\
&\Leftrightarrow x \in t_{x_0}(\ker(\varphi)) = \ker(\varphi) + x_0
\end{aligned}$$

Ainsi $\mathscr{S}_E$ est un sous-espace affine de E dirigé par $\ker(\varphi)$
L'ensemble des solution d'une équation affine est soit vide, soit un sous-espace affine de E

17. SAVOIR REFAIRE : Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que l'ensemble des solution de $u_{n+2} = au_{n+1} + bu - n$ $(\star)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2.

Définition

On appelle suite récurrente linéaire d'ordre 2 une suite réelle ou complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant une équation de type : $\forall n \in, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ $(\mathscr{E})$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

Soit $\varphi \quad \begin{array}{rcl} \mathscr{S}_{\mathscr{E}} & \to & \mathbb{R}^2 \\ (u_n) & \mapsto & (u_0, u_1) \end{array}$

φ est linéaire

J'affirme que φ est un isopmorphisme.

En effet si $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ (but) alors il existe une unique suite vérifiant $(\mathscr{E})$ tq $\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_1 = \beta \end{cases}$

Donc (α, β) admet un unique antécédent par φ. Donc φ est bijective.

Donc $\mathscr{S}_{\mathscr{E}} \sim \mathbb{R}^2$, ainsi $\mathscr{S}_{\mathscr{E}}$ est de dimension fini et $\dim(\mathscr{S}_{\mathscr{E}}) = \dim(\mathbb{R}^2) = 2$

18. Suites récurrentes linéaire d'ordre 2 : préciser les solution réelles de $(\star)$ selon le signe de Δ.

Suite récurrente linéaire du second ordre : $au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$, a, b, c réels avec $a \neq 0$

On cherche une base de solution sous la forme $u_n = r^n$ où $r \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$)

D'ou l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$ (EC)

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$

1. Si $\Delta > 0$: alors (EC) admet deux racines réelles distinctes $r_1 \neq r_2$.

Solutions : $u_n = \lambda r_1 + \mu r_2$ $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

2. Si $\Delta = 0$ alors (EC) admet une racine double ;

Solutions : $u_n = \lambda t^n + \mu n r^n$ $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

3. Si $\Delta < 0$ alors (EC) admet deux racines complexes conjuguées r et $\overline{r}$, ou $r = \rho_0 e^{i\theta_0}$ ($\rho_0 \geq 0$ et $\theta_0 \in \mathbb{R}$)

Solutions : $u_n = \lambda \rho_0^n \cos(\theta_0 n) + \mu \rho_0^n \sin(\theta_0 n)$ $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

19. EDL d'ordre 1 : soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et a, b dans $C^0(I, \mathbb{R})$. Rappeler la méthode de résolution de $y' = a(x)y + b(x)$. Comment fait-on pour trouver une solution particulière ?

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\mathring{I} \neq \emptyset$

On considère l'équation différentielle : $y' = a(t)y + b(t) \qquad (\mathscr{E})$

Modélisation : soient $E = \Delta^1(I, \mathbb{R})$, $F = \mathscr{F}(I, \mathbb{R})$ et $\varphi : \begin{array}{rcl} E & \to & F \\ u & \mapsto & y' - ay \end{array}$

$(\mathscr{E}) \Leftrightarrow \varphi(y) = b$

Donc $(\mathscr{E})$ est une équation affine.

Ici on peut toujours trouver une solution particulière (SP) U par la méthode de la variation de la constante.

On sait aussi que $\ker(\varphi) = \text{vect}\{y_0\}$ ou On sait aussi que $\ker(\varphi) = \text{vect}\{y_0\}$ ou $y_0 : \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & e^{A(t)} \end{array}$ où A est une primitive de a

Ainsi $\mathscr{S}_{\mathscr{E}} = \{U + \lambda y_0 / \lambda \in \mathbb{R}\}$

C'est une droite affine car $\dim(\ker(\varphi)) = 1$

20. EDL d'ordre 2 : soient a, b, c, des constantes réelles avec $a \neq 0$. Même question pour les solutions réelles de $ay'' + by' + cy = d(x)$ où $d \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, selon le signe de Δ.

Équation différentielle linéaire du second ordre : $aay'' + by' + cy = 0$, a, b, c réels avec $a \neq 0$

On cherche une base de solution sous la forme $y : t \mapsto e^{rt}$ où $r \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$)

D'ou l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$ (EC)

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$
1. Si $\Delta > 0$: alors (EC) admet deux racines réelles distinctes $r_1 \neq r_2$.
Solutions : $y : t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$
2. Si $\Delta = 0$ alors (EC) admet une racine double ;
Solutions : $y :\mapsto \lambda e^{rt} + \mu t e^{rt}$ $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$
3. Si $\Delta < 0$ alors (EC) admet deux racines complexes conjuguées r et $\overline{r}$, ou $r = \alpha_0 + i\beta_0$ $(\alpha_0 \in \mathbb{R}$ et $\beta_0 \in \mathbb{R})$
Solutions : $y :\mapsto \lambda e^{\alpha_0 t} \cos(\beta_0 t) + \mu e^{\alpha_0 t} \sin(\beta_0 t)$ $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$