I) Auto-test : Polynômes

1. Donner la définition rigoureuse d'un polynôme.

Définition

On appelle polynôme à coefficient dans K toute suite *presquenulle* d'éléments de K i.e. toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathscr{F}(\mathbb{N}, K)$ qui stationne à 0_K i.e. il existe un certain $N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N$, $a_n : 0_K$
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_0, a_1, ..., a_n, 0_K, 0_K, ...)$

Leur ensemble est noté $K[X]$ et $K[X] \in \mathscr{F}(\mathbb{N}, K)$

2. Définir degré et coefficient dominent. Qu'est ce qu'un polynôme unitaire ?

Définition (degré)

Soit $P = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n \in K[X]$
On appelle degré de P la quantité $d^\circ P = \sup\{n \in \mathbb{N} / a_n \neq 0_K\}$

Définition (coefficient dominant)

Si $P \neq 0$, on appelle coefficient dominant de P le coefficient a_n où $n = d^\circ P$

Définition (polynôme unitaire)

On appelle polynôme unitaire un polynôme dont le coefficient dominant est égal à 1_K

3. Exprimer les coefficient dominant de $P \times Q$ en fonction de ceux de P et Q.

Définition

Soient $P = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n$ et $Q = \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n X^n$ dans $K[X]$. On définit alors $P \times Q$ comme le polynôme $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n X^n$, où pour $n \in \mathbb{N}$, $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

4. Donner les propriétés du degré.

Théorème

Soient P et Q dans $K[X]$
Alors :
1. $d^\circ(P+Q) \leq \max\{d^\circ P; d^\circ Q\}$ avec égalité lorsque $d^\circ P \neq d^\circ Q$
2. $d^\circ(P \times Q) = d^\circ P + d^\circ Q$

5. SAVOIR REFAIRE : montrer que $K[X]$ est intègre.

Théorème

L'anneau $(K[X], +, \times)$ est intègre si P et Q sont dans $K[X]$ et si $P \times Q = 0$
Alors P ou Q est nul.

Preuve :
Soient P et Q dans $K[X]$ tq $P \times Q = 0$
Donc $d^\circ(P \times Q) = d^\circ 0 = -\infty$
or $d^\circ(P \times Q) = d^\circ P + d^\circ Q$
Ainsi $d^\circ P + d^\circ Q = -\infty$
Ainsi $d^\circ P = -\infty$ ou $d^\circ Q = -\infty$
Donc $P = 0$ ou $Q = 0$

6. Donner une base de $K[X]$ où $K_n[X]$ est intègre (où $n \in \mathbb{N}$).

Théorème

$(1, X, X^2, ..., X^n, ...)$ est une base de $K[X]$ (base canonique, liste infinie)
Si $n \in \mathbb{N}$, $K_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie de $K[X]$ et $\dim(K_n[X]) = n+1$ dont une base est $(1, X, X^2, ..., X^n)$

7. SAVOIR REFAIRE : Montrer qu'une famille échelonnée en degré est libre dans $K[X]$.

Théorème

Toute famille de polynômes échelonnée en degré est libre.

Preuve :
On réordonne la famille de sorte que $d^\circ P_1 < ... < d^\circ P_n$
Soient $\lambda_1, ..., \lambda_n$ dans K tq $\lambda_1 P_1 + ... + \lambda_n P_n = 0_{K[X]}$.
Montrons que $\lambda_1 = ... = \lambda_n = O_K$
Par l'absurde, on suppose qu'ils ne sont pas tous nuls.
J'envisage $r = \max\{k \in [\![1; n]\!] / \lambda_k \neq 0_K\}$
Ainsi $\lambda_1 P_1 + ... \lambda_r P_r = 0$

$$\underbrace{P_r}_{d^\circ P_r} = -\frac{1}{\lambda_r} \underbrace{(\lambda_1 P_1 + ... + \lambda_{r-1} P_{r-1})}_{\text{par somme degré } < d^\circ P_r}$$

D'où la contradiction.

8. Définir la divisibilité dans $K[X]$. Donner la définition de deux polynômes P et Q associés. Que dire de deux polynômes unitaires associés ?

Définition

Soient A et B dans $K[X]$. On dit que A divise B, ou que A est un diviseur de B, ou que B est un multiple de A lorsqu'il existe un certain $P \in K[X]$ tq $B = P \times A$
On note $A|B$

Théorème

Soient A et B dans $K[X]$.
Alors $(A|B$ et $B|A) \Leftrightarrow (\exists \lambda \in K^*, A = \lambda B)$
On dit alors que les polynômes A et B sont associés.

Deux polynômes unitaires associés sont égaux.

9. Polynômes irréductibles : donner la définition et deux exemples de degré différent dans $\mathbb{R}[X]$.

Définition

On dit que $P \in K[X]$ est irréductible dans $K[X]$ lorsque :
- P est non constant ($d^\circ P \geq 1$)
- ses seuls diviseurs sont les $\lambda \in K^*$ et les λP où $\lambda \in K^*$

Exemples :
1. Les polynômes de degré 1 sont tous irréductibles dans $K[X]$
2. Dans $\mathbb{R}[X]$ si $P = aX^2 + bX + c$ avec a, b, c réels et $a \neq 0$. Alors P est irréductible ssi $\Delta < 0$

10. Énoncer le théorème de division euclidienne dans $K[X]$.

Théorème

Soient A et B dans $K[X]$, avec $B \neq 0$
Alors il existe un unique couple $(Q; R)$ dans $K[X]^2$ tq $A = BQ + R$ et $d^\circ R < d^\circ B$.
Q est le quotient et R le reste de la division euclidienne de A par B.

11. SAVOIR REFAIRE : soient $\lambda \in K$ et $O \in K[X]$. Montrer que λ est racine de P si et seulement si $(X - \lambda)$ divise P.

Théorème

Soient $\lambda \in K$ et $P \in K[X]$.
Alors λ est racine de P dans K ssi $(X - \lambda)$ divise P ssi $\exists Q \in K[X]$ tq $P = (X - \lambda)Q$

Preuve :
Soit $P \in K[X]$, d'où $\tilde{P} : \begin{array}{ccc} K & \to & K \\ x & \mapsto & \tilde{P}(x) \end{array}$
Soit $\lambda \in K$. Si $(X-\lambda)|P$, on dispose de $Q \in K[X]$ tq $P = (X-\lambda)Q$
Alors $\tilde{P} : x \mapsto (x-\lambda)\tilde{Q}(x)$
Donc $\tilde{P}(\lambda) = (\lambda-\lambda)\tilde{Q}(\lambda) = 0$
Donc λ est racine de P.

Réciproquement, supposons que λ est racine de P.
On effectue la division euclidienne de P par $(X-\lambda)$ d'où un unique couple $(Q,R) \in K[X^2]$ tq $\begin{cases} P = (X-\lambda)Q + R \\ d^\circ R < d^\circ(X-\lambda) = 1 \end{cases}$
Donc R est une constante. On note $\mu = R \in K$
$P = (X-\lambda)Q + \mu$
Or $\tilde{P}(\lambda) = 0$ i.e. $(\lambda-\lambda)\tilde{Q}(\lambda) + \mu = 0$
donc $\mu = 0$ et $P = (X-\lambda)Q$
Donc $(X-\lambda)|P$

12. SAVOIR REFAIRE : Soit P un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$. On suppose que P admet $n+1$ racines distinctes. Montrer que $P = 0$.

Corollaire

Si $P \in K[X]$ avec $d^\circ P \leq n \in \mathbb{N}$ et si P admet $n+1$ racine distinctes dans K alors P $= 0$.

Preuve :
Soit $P \in K[X]$ tq $d^\circ \leq n$
On suppose que P admet $n+1$ racines distinctes notées $\lambda_1, ..., \lambda_{n+1}$ dans K
On applique le théorème à λ_1
D'où un certain $Q_1 \in K[X]$ tq $P = (X-\lambda_1)Q_1$
$\tilde{P}(\lambda_2) = 0_K$, donc $\underbrace{(\lambda_2-\lambda_1)}_{\neq 0_K}\tilde{Q}_1(\lambda_2) = 0_K$
Donc $\tilde{Q}_1(\lambda_2) = O_K$ i.e. λ_2 est racine de Q_1 dans K
On applique le théorème à Q_1
D'où $Q_2 \in K[X]$ tq $Q_1 = (X-\lambda_2)Q_2$
ainsi $P = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)Q_2$
Or $\tilde{P}(\lambda_3) = 0$ i.e. $(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)\tilde{Q}_2(\lambda_3) = 0$
Donc $\tilde{Q}(\lambda_3) = 0_K$
D'où $Q_{n+1} \in K[X]$ tq $\underbrace{P}_{d^\circ \leq n} = \underbrace{(X-\lambda_1)\times ... \times (X-\lambda_{n+1})}_{d^\circ = n+1} Q_{n+1}$
$n \geq d^\circ P = n + 1 + d^\circ Q_{n+1}$
Si $Q_{n+1} \neq 0$, alors on a un problème de degré.
Ainsi $Q_{n+1} = 0$, donc $P = 0$

13. Comment montrer qu'un polynôme est nul via les racines ?

Corollaire

Un polynôme qui admet une infinité de racines est nul

14. Définition de la multiplicité d'une racine ? Racine simple, double, triple...

Définition (Multiplicité des racines)

Soient $P \in K[X]$, $\lambda \in K$ et $d \in \mathbb{N}$
On dit que λ est racine de P de multiplicité exactement d / d'ordre d lorsque $(X-\lambda)^d | P$ et $(X-\lambda)^{d+1} \not| P$
i.e. $\exists Q \in K[X]$ tq $P = (X-\lambda)^d Q$ avec $\tilde{Q}(\lambda) \neq 0_K$

15. SAVOIR REFAIRE : Énoncé et preuve de la formule de Taylor dans $K[X]$.

Théorème (Formule de Taylor dans $K[X]$)

Soient $a \in K$ et $P \in K[X]$,
Alors

$$P = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(X-a)^n$$

Preuve :

Soient $N \in \mathbb{N}$ et $L : \begin{array}{ccc} K_N[X] & \to & K_N[X] \\ P & \mapsto & P - \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(X-a)^n \end{array}$

Il s'agit de prouver que L est nulle.
NB : si $P \in K_N[X]$ et $n > N$, alors $P^{(n)} = 0$
Donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(X-a)^n = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(X-a)^n$
J'affirme que L est linéaire.

Il suffit de montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $L(X^k) = 0$
En effet $(X^k)_{0 \leq k \leq N}$ est une base de $K_N[X]$ et une application linéaire nulle sur une base est nulle sur l'espace tout entier.
On note donc $P = X^k$ montrons que $L(X^k) = 0$ (où $k \in \mathbb{N}$ est fixé)

$$\begin{array}{rcll} P' & = & kX^{k-1} & \\ P'' & = & k(k-1)X^{k-2} & \\ \vdots & = & \vdots & \\ P^{(n)} & = & \dfrac{k!}{(k-n)!}X^{k-n} & \text{si } n \leq k \end{array}$$

Ainsi $\begin{cases} P^{(n)}(a) = \frac{k!}{(k-n)!}a^{k-n} & (\text{si } n \leq k) \\ P^{(n)}(a) = 0 & (\text{si } n > k) \end{cases}$

Ainsi $L(X^k) = X^k - \sum_{n=0}^{k} \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(X-a)^n$

$$\begin{aligned} L(X^k) &= X^k - \sum_{n=0}^{k} \frac{k!}{(k-n)!n!} a^{k-n}(X-a)^n \\ &= X^k \sum_{n=0}^{k} \begin{pmatrix} k \\ n \end{pmatrix} (X-a)^n a^{k-n} \\ &= X^k - (X-a+a)^k \\ &= X^k - X^k \\ &= 0 \end{aligned}$$

16. SAVOIR REFAIRE : Caractérisation de la multiplicité d'une racine à l'aide des dérivées nièmes.

Théorème (Multiplicité d'une racine)

Soit $P \in K[X]$, $P \neq 0$, $a \in K$ et $d \in \mathbb{N}^*$

Alors a est racine de P de multiplicité exactement d ssi $\begin{cases} P(a) = ... = P^{(d-1)}(a) = 0_K \\ P^{(d)}(a) \neq 0_K \end{cases}$

Caractérisation :
On utilise la formule de Taylor :

$$P = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(X-a)^n$$

Soit $d \in \mathbb{N}^*$

$$P = \underbrace{\sum_{n=0}^{d-1} \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(X-a)^n}_{\text{noté } R} + \underbrace{\sum_{n \geq 1} \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(X-a)^n}_{\text{noté } T}$$

Remarque : $T = \frac{P^{(d)}(a)}{n!}(X-a)^d + \frac{P^{(d+1)}(a)}{n!}(X-a)^{n+1} + ...$
On peut le factoriser par $(X-a)^d$
D'où un certain $Q \in K[X]$ tq $T = (X-a)^d Q$
Ainsi $P = (X-a)^d Q + R$ et $d^\circ R < d = d^\circ((X-a)^d)$
Ainsi Q et R sont les quotient et le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)^d$
Prouvons l'équivalence
On suppose que $P(a) = ... = P^{(d-1)}(a) = 0_K$ et $P^{(d)} \neq 0_K$
$R = 0$, donc $P = (X-a)^d Q$
Ainsi $(X-a)^d | P$
or $Q = \frac{P^{(d)}(a)}{d!} + \frac{P^{(d+1)}(a)}{(d+1)!} + ...$
Donc $Q(a) \neq O_K$
Donc $(X-a) \not| Q$ i.e. $(X-a)^{d+1} \not| P$
Donc a est racine de multiplicité exactement d de P

Réciproquement, supposons que a est de racine de multiplicité exactement d.
Donc $(X-a)^d | P$, donc $R = 0$ car c'est le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)^d$

Or $R = \sum_{n+0}^{d-1} \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(X-a)^n$
Donc $P(a) = P'(a) = ... = P^{(d-1)}(a) = 0_K$
Ainsi $P = (X-a)^d Q$
$(X-a)^{d+1} \not| P$ donc $(X-a) \not| Q$
Donc $Q(a) \neq 0_K$
Donc $P^{(d)}(a) \neq 0_K$

17. Énoncé le théorème d'Alembert-Gauss. Quels sont les polynômes irréductible de $\mathbb{C}[X]$?

Théorème

Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ admet au moins une racine complexe.

Corollaire

Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont exactement ceux de degrés 1

18. Soit $z \in \mathbb{C}$ une racine de $P \in \mathbb{R}[X]$. Que dire ? Donner des polynômes irréductible de $\mathbb{R}[X]$

Lemme

Si $P \in \mathbb{R}[X]$ est non constant et si z est racine complexe de P alors $\overline{z}$ aussi.

Théorème

Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont exactement ceux de degré 1 et ceux de degré 2 qui ont un discriminant $\Delta < 0$

19. Définir les fonctions symétriques élémentaires des racines pour un polynôme de degrés 3. Donner les relations coefficients/racines dans le cas général.

Définition

Soit $P \in K[X]$ scindé.
On écrit $P = a_n X^n + ...a_1 X + a_0$ où $a_n \neq 0_K$.
On note $\alpha_1, ..., \alpha_n$ ses racines dans K que l'on répète avec ordre de multiplicité de sorte que $P = a_n \prod_{k=1}^{n}(X - a_k)$
On appelle fonction symétrique en les racines les quantités

$$\sigma_1 = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \qquad \sigma_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \alpha_i \alpha_j \qquad ... \qquad \sigma_n = \sum_{A \leq i_1 < ... < i_n \leq n} \alpha_{i_1} \times ... \times \alpha_{i_n} = \prod_{i=1}^{n} \alpha_i$$

20. Écrire un polynôme unitaire de degré 2,3,4 ou plus en remplaçant les coefficients par les fonction symétriques σ_k.

Corollaire

$$\frac{1}{a_n}P = X^n - \sigma_1 X^{n-1} + \sigma_2 X^{n-2} + ... + (-1)^n \sigma_n$$

21. SAVOIR REFAIRE : polynômes interpolateurs de Lagrange

22. SAVOIR REFAIRE : Les polynômes de Tchebychev