I) Auto-test : Formule de Taylor

1. Donner la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ entre a et b $(a < b)$. On précisera les hypothèse sur la fonction f.

Théorème

Soit $f \in C^{n+1}([a,b],\mathbb{R})$ où $a < b$ dans $\mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$
Alors
$$f(B) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)}_{\text{partie régulière (polynomiale de)B}} + \underbrace{\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{n=1}(t)dt}_{\text{le teste (intégral)}}$$

2. Énoncer l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n.

Corollaire (Inégalité de Taylor-Lagrange)

Si $f \in C^{n+1}[a,b],\mathbb{R}$
Alors
$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} ||f^{(n+1)}||_\infty$$

3. SAVOIR REFAIRE : preuve de la formule de Taylor avec reste intégral.

Preuve :

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \varphi(x) = f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) \end{array}$$

$f^{(n)}$ est de classe C^1, donc φ est de classe C^1
Calculons $\varphi'(x)$ pour $x \in [a,b]$

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= -f'(x) - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{-k(b-x)^{k-1}}{k!} f^{(k)}(x) + \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k+1)}(x) \right) \\ &= f'(x) - \sum_{k=1}^{n} \left(\underbrace{\frac{-(b-x)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(x)}_{u_k} + \underbrace{\frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k+1)}(x)}_{u_{k+1}} \right) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= -f'(x) - \left(\sum_{k=1}^{n} u_{k+1} - u_k \right) \\ &= -f(x) - (u_{n+1} - u_1) \\ &= -f(x) - \left(\frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x) - \frac{(b-x)^0}{0!} f'(x) \right) \end{aligned}$$

Donc $\varphi'(x) = \dfrac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)$

Or $\displaystyle\int_a^b \varphi'(t)dt = [\varphi(t)]_a^b = \varphi(b) - \varphi(a)$

Or $\varphi(b) = f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-b)^k}{k!} f^{(k)}(b) = f(b) - f(b) = 0$

On remplace en utilisant $\varphi'(x) = \dfrac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)$

Donc $\displaystyle\int_a^b -\frac{(b-b)^n}{n!} f(n+1(t)dt = \sum_{k+0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) - f(b)$

D'où le résultat.

4. SAVOIR REFAIRE : montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \xrightarrow[x \to +\infty]{} e^x$

Développer en série entière (cf prépa 2) :

Soit $x \in \mathbb{R}$, montrons que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \xrightarrow[n \to =\infty]{} e^x$

On applique la formule de Taylor-intégral à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ entre 0 et x à la fonction $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^x \end{array}$

$f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$

Or ici $f = \exp$, donc $\forall k \in \mathbb{N}, f^{(k)} = \exp$ donc $f^{(k)}(0) = 1$

Donc $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \underbrace{\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt}_{\text{noté } \varepsilon_n}$

Il s'agit de prouver que $\varepsilon_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

$0 \leq |\varepsilon_n| = \left| \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt \right| \leq \left| \int_0^x \frac{|x-t|^n}{n!} e^t dt \right|$

Si $x \geq 0$ et si $t \in [0; x]$ alors $e^t \leq e^x$

Donc $0 \leq |\varepsilon_n| \leq \frac{e^x}{n!} \int_0^x (x-t)ndt = \frac{e^x}{n!} \left[\frac{-(x-t)^{n+1}}{n+1} \right]_0^x$

Donc $0 \leq |\varepsilon_n| \leq e^x \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$

$x^n \underset{+\infty}{\ll} n!$ i.e. $\dfrac{x^n}{n!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, donc $\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Ainsi par encadrement $\varepsilon_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Si $x \leq 0$, $\forall t \in [x; 0]$, $e^t \leq 1$

Donc $0 \leq |\varepsilon_n| \leq \frac{1}{n!} |\int_0^x (t-x)^n dt|$

Donc $0 \leq |\varepsilon_n| \leq \frac{1}{n!} \left[\frac{(t-x)^{n+1}}{n+1} \right]_0^x = \frac{|x|}{(n+1)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Ainsi par encadrement, on a encore $\varepsilon \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ car $|x|^n \underset{+\infty}{\ll} n!$

5. SAVOIR REFAIRE : montrer que $\forall x \geq 0$, $x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$ via une formule de Taylor.

Encadrement globaux :

Montrons que $\forall x \in \mathbb{R}^+, x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$

Pour $\ln(1 = x) \leq x$

Soit $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(1+x) \end{array}$

Taylor-intégral à l'ordre $n = 1$ entre 0 et x (où $x \geq 0$)

$f(x) = f(0) + \dfrac{f'(0)}{1!} + \displaystyle\int_0^x \frac{x-t}{1!} f''(t)dt$

Or $f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$ et $f''(x) = \dfrac{-1}{(1+x)^2}$

donc $\ln(1+x) = x - \underbrace{\int_0^x (x-t)\frac{1}{(1+t)^2}dt}_{\geq 0}$

Donc si $x \geq 0$, $\ln(1+x) \leq x$

Pour $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x)$: Taylor-intégral à l'ordre 2 entre 0 et x.

$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!} + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2!} f^{(x)}(t)dt$

Or $f''(0) = -1$

Donc $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \underbrace{\int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} + \frac{2}{(1+t)^3}dt}_{\geq 0}$ car $f''(x) = -(1=x)^{-2}$ et $f^{(3)(x) = Z(1+2)^{-3}}$

Donc $\forall x \geq 0, \ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}$

6. Énoncer la formule de Taylor-Young à l'ordre $n \in \mathbb{N}$. On précisera les hypothèses sur la fonction

Théorème

Soit $f \in \Delta^n(I, \mathbb{R})$ et $a \in \mathring{I}$ (où I est un intervalle).
Alors il existe une fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ tq :

$$\forall x \in I, f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) = (x-a)^n \varepsilon(x) \qquad \text{où } \varepsilon(x) \xrightarrow[x \to = \infty]{} 0$$