I) Auto-test : Développement limités.

1. Donner la définition d'un développement limité à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ en zéro.

Définition

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0, $f : I \to \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$
On dit que f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de zéro lorsqu'il existe :
- des réels $a_0, a_1, ...a_n$
- une fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ nulle en zéro tq $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ tq

$$\forall x \in I, f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x + x^n \varepsilon(x)$$

2. SAVOIR REFAIRE : prouver l'unicité d'un développement limité en zéro et en déduite la forme générale d'un développement limité pour une fonction pair/impair.

Théorème

Si f admet un développement limité à l'ordre n en zéro, alors celui ci est unique.

Preuve :
Soient $a_0, a_1, ...a_n$ et $b_0, b_1, ...b_n$ des réels, $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ et $\eta : I \to \mathbb{R}$ des fonctions qui tendent vers zéro en zéro tel que

$$\forall x \in I, f(x) = a_O + a_1 x + a_2 x^2 + ...a_n x^n + x^n \varepsilon(x) \qquad (1)$$

$$\forall x \in I, f(x) = b_O + b_1 x + b_2 x^2 + ...b_n x^n + x^n \varepsilon(x) \qquad (2)$$

Montrons que $\forall i \in [\![0; n]\!]$, $a_i = b_i$

$(1) - (2)$ donne $\forall x \in I$, $(a_0 - b_0) + ... + (a_n - b_n)x^n + (\varepsilon(x) - \eta(x))x^n = 0$

Par l'absurde : Soir r le premier indice tq $a_r \neq b_r$ i.e. $a_0 = b_0, ..., a_{r-1} = b_{r-1}, a_r \neq b_r$
$\forall x \in I, (a_r - b_r)x^n + (b_{r+1} - b_{r+1})x^{r+1} + ... + (a_n - b_n)x^n + (\varepsilon(x) - \eta(x))x^n = 0$
Pour $x \neq 0$, on divise par x^r
$(a_r - b_r) + (a_{r+1} - b_{r+1})x + ... + (a_n - b_n)x^{n-r} = 0$
On fait tendre x vers zéro avec $c \neq 0$, ainsi $a_r - b_r = 0$, d'où la contradiction.

Corollaire (parité)

On suppose que f admet un développement limité à l'ordre n en zéro
1. Si f est paire, alors son développement limité ne contient que des puissances paires.
2. Si f est impaire, alors sont développement limité ne contient que des puissances impaires.

Preuve :
Soit $x \in I$, $f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n + x^n \varepsilon(x)$ où $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$
Donc $f(-x) = a_0 - a_1 x + a_2 x^2 - ... + (-1)^n a_n x^n + x^n \varepsilon(x)$

Si f est paire $f(-x) = f(x)$.
Ainsi par unicité des développement limité, on identifie les coefficients :
$a_0 = a_0 \qquad a_1 = -a_1 = 0 \qquad a_3 = a_3 \quad ...$

Si f est impaire $f(-x) = -f(x)$.

Ainsi par unicité des développement limité, on identifie les coefficients :
$a_0 = -a_0 = 0 \qquad a_1 = a_1 \qquad a_3 = -a_3 = 0 \quad ...$

3. Quelles hypothèses faut-il sur f pour que le développement limité à l'ordre n en zéro soir donné par la formule de Taylor-Young ? Préciser alors le coefficient a_k en fonction de f

Théorème (Les Développement limité "Tayloriens")

Si $f : I \to \mathbb{R}$ est de classe Δ^n dans un voisinage de 0 alors elle admet un $dveloppementlimitl'ordrenenzro(0)$ qui est donné par la formule de Taylor-Young en fonction des dérivées succesives de f i.e. $f(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + ... + a_n x^n + \circ(x)^n$ où $a_k = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$

4. Développement limité usuel

Soit $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ tq $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

$$\begin{aligned}
e^x &\underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!}\varepsilon(x)\\
\cos(x) &\underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x)\\
\sin(x) &\underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2}\varepsilon(x)\\
\mathrm{ch}(x) &\underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x)\\
\mathrm{sh}(x) &\underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2}\varepsilon(x)\\
\tan(x) &\underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + x^6\varepsilon(x)\\
\mathrm{th}(x) &\underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + x^6\varepsilon(x)\\
(1+x)^\alpha &\underset{x\to 0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x)\\
\frac{1}{\sqrt{1+X}} &\underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\times 3}{2\times 4}x^2 - \frac{1\times 3\times 5}{2\times 3\times 6}x^3 + ... + (-1)^n\frac{1\times 3\times ...\times(2n-1)}{2\times 4\times ...\times(2n)}x^n + x^n\varepsilon(x)\\
\sqrt{1+X} &\underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\times 4}x^2 + \frac{1\times 3}{2\times 4\times 6}x^3 + ... + (-1)^{n+1}\frac{1\times 3\times ...\times(2n-3)}{2\times 4\times ...\times(2n)}x^n + x^n\varepsilon(x)\\
\frac{1}{1-x} &\underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + ... + x^n + x^n\varepsilon(x)\\
\frac{1}{1+x} &\underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 + (-1)^n x^n + x^n\varepsilon(x)\\
\ln(1+x) &\underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x)\\
\arctan(x) &\underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - ... + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + x^{2n+2}\varepsilon(x)\\
\mathrm{argth}(x) &\underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - ... + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + x^{2n+2}\varepsilon(x)
\end{aligned}$$

5. SAVOIR REFAIRE : soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie pour $x \neq 0$ par $f(x) = \dfrac{\sin(x) - x}{x^3}$. Montrer que f admet un prolongement continue en zéro. Ce prolongement est-il dérivable ?

Montrons que f admet une limite fini en zéro.
$DL_3(0)$ de $\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$
Donc $\sin x - x \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-x^3}{6}$
Ainsi $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\frac{-x^3}{6}}{x^3} = \frac{-1}{6}$
f admet un prolongement continue en zéro obtenu en posant $f(0) = \frac{-1}{6}$
Montrons que f est dérivable en zéro.
Il suffit de montrer que f admet un développement limité à l'ordre 1 en zéro $DL_4(0)$ de $\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + x^4\varepsilon(x)$ où $\varepsilon \xrightarrow[x\to 0]{} 0$
Donc si $x \neq 0$, $f(x) = \frac{\sin(x)-x}{x^3} = \frac{\frac{-x^3}{6}+x^4\varepsilon(x)}{x^3}$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{-1}{6} + x\varepsilon(x) \qquad DL_1(0) \text{ de } f \\ &= a_0 + a_1 x + x\varepsilon(x) \end{aligned}$$

ou $a_0 = \frac{-1}{6}$ et $a_1 = 0$
D'après le cours, f est dérivable en zéro et $f'(0) = 0$

6. SAVOIR REFAIRE : soit $u_n \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$. Donner un équivalent de u_n en $+\infty$

$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$ où $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$
$x = \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$$\begin{aligned} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) \\ n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) &\underset{n\to+\infty}{=} n - \frac{1}{2} + \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) \\ u_n &\underset{n\to+\infty}{=} \exp\left(n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} e^{n-\frac{1}{2}+\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)} \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{e^n}{\sqrt{e}} \times e^{\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)} \end{aligned}$$

Donc $\dfrac{u_n}{\frac{e^n}{\sqrt{e}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$
Ainsi $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e^n}{\sqrt{e}}$

7. SAVOIR REFAIRE : produit développement limité à l'ordre 3 en zéro de $\sqrt{1+x} \times \cos(x)$

$DL_3(0)$ de $\sqrt{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{8}x^2 + \dfrac{1}{16}x^3 + o(x^3)$
$DL_3(0)$ de $\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \dfrac{1}{2}x^2 + o(x^3)$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\sqrt{1-x}\times\cos(x) &\underset{x\to 0}{=} \left(1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+o(x^3)\right)\times\left(1+\frac{1}{2}x^2+o(x^3)\right)\\
f(x) &\underset{x\to 0}{=} 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x^3+o(x^3)\\
&\underset{x\to 0}{=} 1+\frac{1}{2}x-\frac{5}{8}x^2-\frac{3}{18}x^3+o(x^3)
\end{aligned}$$

8. SAVOIR REFAIRE : composition développement limité à l'ordre 5 en zéro de $\arccos x$

On pose $u=\sin(x)\xrightarrow[x\to 0]{} 0$

$\tan \underset{u\to 0}{=} u = \frac{u^3}{3}+\frac{2}{15}u^5+o(u^5)$

$u \underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)$

$u^2 \underset{x\to 0}{=} x^2-\frac{1}{3}x^4+o(x^5)$

$u^3=u^2\times u \underset{x\to 0}{=} x^3-\frac{1}{6}x^5-\frac{1}{3}x^5+o(x^5)=x^3-\frac{1}{2}x^5+o(x^5)$

$u^5 \underset{x\to 0}{=} x^5+o(x^5)$

Ainsi $\tan(\sin(x)) \underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{6}+\frac{2}{15}x^5+o(x^5)$

Conclusion : $f(x)\underset{x\to 0}{=} x+\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{40}x^5+o(x^5)$

9. SAVOIR REFAIRE : composition développement limité à l'ordre 7 en zéro de $\sqrt{\cos(x)}$

On a $\sqrt{\cos(x)}=\sqrt{(\cos(x)-1)+1}$
On pose $u=\cos(x)-1$

$\cos(x)\underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}+o(x^7)$

$\sqrt{\cos(x)}\underset{x\to 0}{=}\sqrt{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}+o(x^7)}$

$\sqrt{\cos(x)-1}\underset{x\to 0}{=}\sqrt{\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}+o(x^7)}$

$\sqrt{1+u}\underset{x\to 0}{=} 1+\frac{1}{2}u-\frac{1}{8}u^2+\frac{1}{16}u^3+\underbrace{\dots}_{\text{calcul inutile}}+o(u^7)$

$u\underset{u\to 0}{\sim}\frac{-x^2}{6}$ ainsi $u^3\underset{u\to 0}{\sim}\frac{x^6}{8}$, $u^4\underset{u\to 0}{\sim}\frac{x^8}{16}=o(x^7)$, de même pour $u^5=o(x^7)$, $u^6=o(x^7)$ et $u^7=o(x^7)$

$u=\underset{x\to 0}{=}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}+o(x^7)$

$u^2=\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{24}+o(x^7)$

Donc

$$\begin{aligned}
f(x) &\underset{x\to 0}{=} 1+\frac{1}{2}\left(\frac{-x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^6}{24}\right)+\frac{1}{16}\left(\frac{-x^6}{8}\right)+o(x^7)\\
&\underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x^2}{4}-\frac{1}{96}x^4-\frac{19}{5760}x^6+o(x^7)
\end{aligned}$$

10. SAVOIR REFAIRE : quotient développement limité à l'ordre 5 en zéro de $\tan(x)$

$\tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}=\sin(x)\times\frac{1}{\cos(x)}$

$\dfrac{1}{\cos(x)} = \dfrac{1}{1+u}$ où $u = \cos(x) - 1 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

$u = \cos(x) - 1 \underset{x\to 0}{=} -\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + o(x^5)$

$u \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{-x^2}{2}$, $u^3 \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{-x^6}{8} = o(x^5)$, de même pour u^4 et u^5

$\dfrac{1}{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1 - u + u^2 - u^3 + u^4 - u^5 + o(u^5)$

$\dfrac{1}{\cos(x)} = \dfrac{1}{1+\cos(u)} \underset{u\to 0}{=} 1 - \left(\dfrac{-x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24}\right) - \dfrac{x^4}{4} + o(x^5)$

$\dfrac{1}{\cos(x)} \underset{x\to 0}{=} 1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{5x^4}{24} + o(x^5)$

$\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}$

$$\begin{aligned}\tan(x) &= \sin(x) \times \frac{1}{\cos(x)}\\ &\underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{2} + \frac{5}{24}x^5 - \frac{x^3}{6} - \frac{1}{12}x^5 = \frac{x^5}{120} + o(x^5)\\ &\underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)\end{aligned}$$

11. SAVOIR REFAIRE : primitivation développement limité à l'ordre 5 en zéro de $\arccos(x)$

$(\arccos)'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1+x^2}}$

Il faut donc un développement limité à l'ordre 4 en zéro de $x \mapsto \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ Posons $u = -x^2 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

$\dfrac{1}{\sqrt{1+u}} \underset{u\to 0}{=} 1 - \dfrac{1}{2}u + \dfrac{3}{8}u^2 - \dfrac{5}{16}u^3 + ... + o(x^4)$

or $u^3 \underset{u\to 0}{=} -x^6 = o(x^4)$ de même pour u^4

$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \underset{u\to 0}{=} 1 + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{2}{8}x^4 + o(x^4)$

On multiplie par -1 et on primitive

Donc

$$\begin{aligned}\arccos(x) &\underset{x\to 0}{=} \arccos(0) - x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{40}x^5 + o(x^5)\\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{40}x^5 + o(x^5)\end{aligned}$$

12. Donner la définition général d'un développement limité à l'ordre n en $x_0 \in \mathbb{R}$

Définition

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathring{I}$

On dit que f admet un développement limité à l'ordre n en x_0 ($DL_n(x_0)$) lorsqu'il existe des réels $a_0, ..., a_n$, une fonction $\varepsilon I \to \mathbb{R}$ tq $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$

$$f(x) \underset{x\to x_0 0}{a} + a_1(x - x_0) + ... + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)\varepsilon(x)$$

13. SAVOIR REFAIRE : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x + 2}$. Montrer que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote en $+\infty$ et étudier sa position par rapport à la courbe.

1. Ici $x^3 - 3x + 2 \underset{+\infty}{x}{}^3$ donc $\sqrt[3]{x^3 - 3x + 2} \underset{+\infty}{x}$ i.e. $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1 (a = 1)$
On doit étudier $f(x) - x$
Si $x > 0$,

$$\begin{aligned} f(x) - x &= \sqrt[3]{x^3 - 3x + 2} - x \\ &= \sqrt[3]{x^3\left(1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right)} - x \end{aligned}$$

$$x\left[\left(1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}} - 1\right]$$

On pose $u = \dfrac{-3}{x^2} + \dfrac{2}{x^3} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$
$DL_1(0) : (1+u)^{\frac{1}{3}} \underset{x \to 0}{=} 1 + \dfrac{u}{3} + o(u) = 1 + \dfrac{u}{3} + u\varepsilon(u)$ où $\varepsilon(u) \xrightarrow[u \to 0]{} 0$
$u \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{-3}{x^2}$
Donc $(1+u)^{\frac{1}{3}} - 1 = \dfrac{1}{3}u + o(u) \underset{u \to 0}{\sim} \dfrac{1}{3}u$
ainsi $f(x) - x \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{-1}{x}$
En particulier $f(x) - x \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0 (b = 0)$

D'où l'asymptote $\Delta : y = x$

2. Au voisinage de $+\infty$, $\dfrac{-1}{x} < 0$
0Donc $f(x) - x < 0$
Donc $\mathscr{C}_f$ est au dessous de son asymptote

14. SAVOIR REFAIRE : montrer que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} - x}{x^3} = \dfrac{1}{8}$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x^2) - \sin^2(x)}{x^4} = -\dfrac{1}{6}$

1. Montrons que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} - x}{x^3} = \dfrac{1}{8}$
$DL_3(0) : \sqrt{1+x} \underset{x \to 0}{=} 1 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{8}x^2 + \dfrac{1}{16}x^3 + o(x^3)$
$DL_3(0) : \sqrt{1-x} \underset{x \to 0}{=} 1 - \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{8}x^2 - \dfrac{1}{16}x^3 + o(x^3)$

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x \to 0}{=} \frac{\left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)\right) - \left(1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)\right)}{x^3} \\ &\underset{x \to 0}{=} \frac{\frac{1}{8}x^3 + o(x^3)}{x^3} \\ &\underset{x \to 0}{=} \frac{1}{8} + o(1) \\ &\underset{x \to 0}{=} \frac{1}{8} + \varepsilon(x) \qquad \text{où } \varepsilon(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0 \end{aligned}$$

Donc $f(x) \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{1}{8}$

2. Montrons que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x^2) - \sin^2(x)}{x^4} = -\dfrac{1}{6}$

On pose $u = x^2$, $DL_2(0)$
$\ln(1+u) \underset{u \to 0}{=} u - \dfrac{u^2}{2} + o(u^2)$

$\ln(1+x^2) \underset{x\to 0}{=} x^2 - \dfrac{x^4}{2} + o(x^4)$

$DL_4(0)$

$\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^4)$

$\sin^2(x) \underset{x\to 0}{=} x^2 - \dfrac{1}{3}x^4 + o(x^4)$

Donc $f(x) \underset{x\to 0}{=} \dfrac{x^2 - \frac{x^4}{2} - x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)}{x^4} = \dfrac{-1}{6} + o(1)$

Donc $f(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{-1}{6} + \varepsilon(x)$ où $\varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ i.e. $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \dfrac{-1}{6}$