I) Auto-test : Matrices (I)

1. Donner la définition rigoureuse d'une matrice.

Définition

Soient K un corps commutatif, p et q dans $\mathbb{N}^*$

On appelle matrice de taille $p \times q$ (ou (p, q)) une application : $\begin{array}{ccc} [\![1, p]\!] \times [\![1, q]\!] & \to & K \\ (i; j) & \mapsto & a_{ij} \end{array}$

On note $M_{p,q}(K)$ leur ensemble.

2. Qu'est ce qu'une matrice diagonale, scalaire, triangulaire supérieure, inférieure ?

Définition

- Matrice diagonale : tous les termes sont nuls sauf ceux de la diagonale.
- Matrice scalaire : matrice diagonale dont tous les termes diagonaux sont égaux.
- Matrice triangulaire supérieure : matrice carrée dont tous les termes sous la diagonales sont nuls.
- Matrice triangulaire inférieure : matrice carrée dont tous les termes au dessus de la diagonales sont nuls.

3. Matrice d'une famille de vecteur : soient E un K-espace vectoriel de dimension finie égale à n, $\beta = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ une base de E, et $(u_1, ..., u_p)$ une famille de p vecteurs de E. Définir $\mathrm{Mat}_\beta(u_1, ...up)$. Quelle est la taille de cette matrice ?

Définition

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}$, $\beta = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ une base de E et $u_1, ..., u_q$ des vecteurs de E $(q \in \mathbb{N}^*)$

On appelle matrice de ce vecteur dans la base β la matrice notée

$$\mathrm{Mat}_\beta(u_1, ..., u_q) = \begin{array}{c} \\ e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u_1 & \cdots & u_q \end{array} \\ \begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{n1} & \cdots & u_{nq} \end{pmatrix} \end{array}$$

où, si $i \in [\![1, n]\!]$

$$u_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}\varepsilon_i$$

4. Matrice d'une application linéaire : soient E un K-espace vectoriel de dimension finie n, $\beta = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ une base de E, F un K-espace vectoriel de dimension finie n, de base $\beta'(e_1, ..., e_n)$. Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Définir $\mathrm{Mat}_{\beta',\beta}$(f). Quelle est la taille de cette matrice ?

Définition

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie égale à q, F un K-espace vectoriel de dimension finie égale à p, $f \in \mathscr{L}(E,F)$, $\beta = (e_1, ..., e_q)$ une base de E et $\beta' = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_p)$ une base de F.
On appelle matrice de f relativement aux bases β et β' la matrice noté

$$\mathrm{Mat}_{\beta'\beta}(f) = \mathrm{Mat}_{\beta'}(f(e_1), ..., f(e_q))$$

notée aussi $[f]_{\beta'\beta} = \begin{array}{c} \\ \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_p \end{array} \begin{array}{c} f(e_1) \quad \cdots \quad f(e_q) \\ \left(\begin{array}{ccc} & & \\ & & \\ & & \end{array} \right) \end{array}$

5. Quelle est la dimension du K-espace vectoriel $M_{p,q}(K)$?

Corollaire

$M_{pq}(K)$ est de dimension finie et $\dim(M_{pq}(K)) = p \times q$

6. Produit matriciel : soient $A = [a_{ij}] \in M_{p,q}(K)$ et $B = [b_{ij}] \in M_{q,r}(K)$. On pose $C = AB = [c_{ij}]$. Quelle est la taille de C ? Exprimer les c_{ij} en fonction des a_{ij} et des b_{ij}.

Définition

Soient $A = (a_{ij}) \in M_{pq}(K)$ et $B = (b_{ij}) \in M_{qr}(K)$
Alors, $C = A \times B = (c_{ij}) \in M_{pr}(K)$ telle que :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{q} a_{ik} b_{kj}$$

7. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie n, de base β. Que signifie que $\psi : \mathscr{L}(E) \to M_n(K)$, définie par $\psi(f) = \mathrm{Mat}_\beta(f)$ est un isomorphisme d'algèbre ?

Théorème

Si E est un K-espace vectoriel de dimension finie égale à n et de base β

$$\begin{array}{cccc} \psi : & (\mathscr{L}(E), +, \bullet, \circ) & \to & (M_n(K), +, \bullet, \times) \\ & f & \mapsto & [f]_\beta \end{array} \quad \text{est un isomorphisme d'algèbre}$$

8. Matrices élémentaires : donner une famille base de $M_n(K)$. Que vaut le produit des matrices $E_{ij} \times E_{kl}$?

Définition

On appelle matrice élémentaire de $M_n(K)$ une matrice dont tous les termes sont nuls sauf un qui est égal à 1_K

Théorème

1. $(E_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ est une famille de $M_n(K)$
2. Produit : $E_{ij} \times E_{k\ell} = \begin{cases} 0 \text{ si } j \neq k \\ E_{i\ell} \text{ si } j = k \end{cases}$

9. SAVOIR REFAIRE : soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$

Exemple :

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$

On écrit $A = I_3 + N$ où $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$N^2 = 0$ (nilpotent)

$N^3 = N^2 \times N = 0$, $\forall k \geq 2, N^k = 0$

Soit $n \in \mathbb{N}, A^n = (N + I_3)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k \times I_3^{n-k}$

On utilise le binôme de Newton car I_3 et N commutent.

$\forall k \in [\![0,n]\!], I_3^{n-k} = I_3$ et $\forall k \geq 2, N^k = 0$

Donc $A^n = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} N^k = \binom{n}{0} N^0 + \binom{n}{1} N = I_3 + nN$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n & 2n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

10. Du géométrique au numérique : soient E un K-espace vectoriel de dimension finie, de base β_E et F un K-espace vectoriel de dimension finie, de base β_F. Soient $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $x \in E$. Exprimer $[f(x)]_{\beta_F}$ en fonction des expressions matricielles de f et x. (règle des fractions)

Théorème

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie égale à q de base β_E, F un K-espace vectoriel de dimension finie égale à p de base β_F et $f \in \mathscr{L}(E,F)$
Soit $x \in E$
On note $A = [f]_{\beta_F \beta_E}$, $U = [x]_{\beta_E}$ et $V = [f(x)]_{\beta_F}$
Alors $V = A \times U$ i.e. $[f(x)]_{\beta_F} = [f]_{\beta_F \beta_E} \times [x]_{\beta_E}$

11. SAVOIR REFAIRE : Du numérique au géométrique : déterminer les matrices $A \in M_n(K)$ telles que $\forall M \in M_n(K), AM = MA$.

Définition

On appelle "centre" de $M_n(K)$ d'un groupe ou d'un anneau, l'ensemble des éléments qui commutent avec tous les autres.
On le note $\mathscr{C} = \{A \in M_n(K) / \forall M \in M_n(K), AM = MA\}$

Théorème

Le centre de $M_n(K)$ est $\mathscr{C} = \{\lambda I_n / \lambda \in K\}$ l'ensemble des matrices scalaire.

Preuve :
On à déjà vu que les matrices scalaires commutent avec les autres.
Donc $\{\lambda I_n / \lambda \in K\} \subset \mathscr{C}$

Réciproquement, soit $A \in \mathscr{C}$.
Montrons que A est une matrice scalaire.
On pose $E = K^n$ de base β_n (base canonique).
A devient $f = f_A \in \mathscr{L}(E)$, l'unique endomorphisme de K^n tq $[f]_{\beta_n} = A$
A commute avec tous les autres matrices signifie exactement que f commute avec tout endomorphisme $g \in \mathscr{L}(E)$ i.e. $\forall g \in \mathscr{L}(E), f \circ g = g \circ f$.
Montrons que $\exists \lambda \in K, A = \lambda I_n$ i.e. $\exists \lambda \in K, [f]_{\beta_n} = \lambda I_n = \lambda [\mathrm{Id}_E]_{\beta_n} = [\lambda \, \mathrm{Id}_E]_{\beta_n}$.
Montrons que $\exists \lambda \in K$ tq $f = \lambda \, \mathrm{Id}_E$ i.e. f est une homothétie.

D'après le Lemme de Schur : ismq $\forall x \in E, f(x) \in Kx$
Soit $x_0 \in E$, mq $f(x_0 \in Kx_0)$
Soit F un supplémentaire quelconque de Kx_0 dans E
On choisit pour g la projection vectorielle p (sur F parallèle à Kx_0)
Mq $f(x_0) \in \ker(p)$
or $p[f(x_0)] = f[p(x_0)]$ car f et p commutent.
or $p(x_0) = 0$
Donc $p[f(x_0)] = f(0_E) = 0_E$ car f est linéaire.
Donc $f(x_0) \in \ker(p) = Kx_0$.
D'après le Lemme de Schur, f est une homothétie.

Conclusion : A est une matrice scalaire.

12. Définir le rang d'une matrice $A \in M_{p,q}(K)$ et donner ses propriétés élémentaires.

Définition

On appelle rang de A, le rang de la famille de vecteur $(C_1, ..., C_q)$ dans le K-espace vectoriel $M_{p1}(K)$

$$\mathrm{rg}(A) = \dim(\mathrm{vect}\{C_1, ..., C_q\})$$

Propriété immédiate :
Si $A \in M_{pq}(K)$ alors $\mathrm{rg}(A) \leq p$ et $\mathrm{rg}(A) \leq q$

13. Même décor que la question 10. On note $A = \mathrm{Mat}_{\beta_F,\beta_E}(f)$. A quelle condition sur $\mathrm{rg}(A)$ l'application f est-elle injective, surjective, bijective nulle ?

Corollaire

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie égale à q, F un K-espace vectoriel de dimension finie égale à p et $f \in \mathscr{L}(E, F)$
On note $A = [f]_{\beta'\beta} \in M_{pq}(K)$
Alors :
1. f est injective ssi $\mathrm{rg}(A) = q$
2. f est surjective ssi $\mathrm{rg}(A) = p$
3. f est bijective ssi $\mathrm{rg}(A) = p = q$
4. f est nulle ssi $\mathrm{rg}(A) = 0$

14. SAVOIR REFAIRE : caractériser les matrices de rang 1.

Théorème

Soit $A \in M_{pq}(K)$
Alors A est de rang 1 ssi $A = C \times L$ où $C \in M_{P1}(K)$ i.e. $C =$ colonne $\neq 0$ et où $L \in M_{1q}(K)$ i.e. $L =$ ligne $\neq 0$

Preuve :
Soient $C \in M_{p1}(K)$ $(C \neq 0)$ et $L \in M_{1q}(K)$ $(L \neq 0)$

On note $C = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} \lambda_1 \cdots \lambda_q \end{pmatrix}$

Soit $A = C \times L$ montrons que $\mathrm{rg}(A) = 1$

$$\begin{aligned} C \times L &= \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \lambda_1 \cdots \lambda_q \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_1\lambda_1 & u_1\lambda_2 & \cdots & u_1\lambda_q \\ u_2\lambda_1 & u_1\lambda_2 & \cdots & u_2\lambda_q \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_p\lambda_2 & u_p\lambda_2 & \cdots & u_p\lambda_q \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 C | \lambda_2 C | \cdots | \lambda_q C \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc les vecteurs colonnes de A sont tous proportionnels à C.
Donc $\mathrm{rg}(A) = 1$ (NB : $C \neq 0$, sinon $\mathrm{rg}(A) = 0$)

Réciproquement, soit A une matrice de rang 1 i.e. toutes les colonnes de A sont proportionnelles.
Supposons que $C_1 \neq 0$ où $A = \begin{pmatrix} C_1 | \cdots | C_q \end{pmatrix}$

D'où $\lambda_2, ..., \lambda_q$ tq $\begin{cases} C_2 = \lambda_2 C_1 \\ \vdots \\ C_q = \lambda_q C_1 \end{cases}$

On pose alors $C = C_1 \neq 0$ (par hypothèse) et $L = (1, \lambda_2, ..., \lambda_q) \neq 0$ (car $1 \neq 0$)

Ainsi on a bien $C \times L = A$

15. Définir $\mathrm{GL}_n(k)$.

Définition

L'ensemble des matrices inversibles de $M_n(K)$ s'appelle le groupe linéaire de taille n.
On le note $\mathrm{GL}_n(K)$

16. Donner le théorème de Cayley-Hamilton en dimension 2.

Théorème (de Cayley-Hamilton)

Si $A \in M_2(K)$, on écrit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on définit alors :
- son déterminant $\det(A) = ad - cb$
- sa trace $\mathrm{tr}(A) = a + d$

Alors

$$A^2 - (\mathrm{tr}(A)A) + \det(A)I_2 = 0$$

17. A quelle condition une matrice triangulaire supérieur est-elle inversible ?

Phénomène général :
Une matrice triangulaire supérieure est inversible ssi $\forall i \in [\![1;n]\!], a_{ii} = 0_k$