# I) Auto-test : Ensembles et applications

**1. Donner les schémas logiques du cours équivalents aux schémas suivants (où $p$, $q$ et $r$ désignent des assertions vraies ou fausses) : non($p \Rightarrow q$), non($p$ et $q$), non($p$ ou $q$), ($p \Rightarrow q$) (contraposition), ($p \Leftrightarrow q$) (double implication), et ($p \Leftrightarrow q \Leftrightarrow r$)**

**Définition**

NON :

| $p$ | $non(p)$ |
|---|---|
| V | F |
| F | V |

OU :

| $p$ | $q$ | $p$ ou $q$ |
|---|---|---|
| V | F | V |
| F | V | V |
| F | F | F |
| V | V | V |

ET :

| $p$ | $q$ | $p$ et $q$ |
|---|---|---|
| V | F | F |
| F | V | F |
| F | F | F |
| V | V | V |

$\Rightarrow$ :

| $p$ | $q$ | $p \Rightarrow q$ |
|---|---|---|
| V | F | F |
| F | V | V |
| F | F | V |
| V | V | V |

$\Leftrightarrow$ :

| $p$ | $q$ | $p \Leftrightarrow q$ |
|---|---|---|
| V | F | F |
| F | V | F |
| F | F | V |
| V | V | V |

**Théorème**

Soient $p$ et $q$ deux assertions
alors
1. $non(p \text{ et } q) \leftrightarrow (non(p))$ ou $(non(q))$

2. $non(p \text{ ou } q) \leftrightarrow (non(p))$ et $(non(q))$

3. $non(p \Rightarrow q) \leftrightarrow p$ et $(non(q))$

4. $p \Rightarrow q \leftrightarrow (non(q)) \Rightarrow (non(p))$ (contraposé)

5. $(p \Leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \Rightarrow q)$ et $(q \Rightarrow p)$ (Double implication)

6. $(p \Leftrightarrow q)$ et $(q \Leftrightarrow r) \leftrightarrow [(p \Rightarrow q)$ et $(q \Rightarrow r)$ et $(r \Rightarrow p)]$

**2. Si $X$ est un ensemble et $\mathcal{P}$ une propriété, donner la négation des énoncés : "$\forall x \in X, \mathcal{P}(x)$" et "$\exists x \in X, \mathcal{P}(x)$". Donner les règles d'échange des quantificateurs $\forall$ et $\exists$.**

**Théorème**

Soient $E$ un ensemble et $\mathcal{P}(\bullet)$ une propriété sur $E$
Alors
1. $non(\forall x \in E, \mathcal{P}(x)) \leftrightarrow \exists x \in E, non(\mathcal{P}(x))$

2. $non(\exists x \in E, \mathcal{P}(x)) \leftrightarrow \forall x \in E, non(\mathcal{P}(x))$

### 3. Donner les formules de complémentaire de l'union et de l'intersection.

**Théorème**

Soient $E$ un ensemble, $A$, $B$ et $C$ des parties de $E$
Alors
1. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

2. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

3. $\complement_E(A \cup B) = (\complement_E A) \cap (\complement_E B)$

4. $\complement_E(A \cap B) = (\complement_E A) \cup (\complement_E B)$

### 4. SAVOIR REFAIRE : montrer que l'ensemble des nombres premiers est infini.

**Définition**

On appelle nombre premier tout entier $p \geq 2$ qui n'a d'autre diviseur que 1 et lui même

**Théorème**

Tout entier supérieur ou égal à 2 admet un diviseur premier

**Théorème** $(\star)$

Soit $\mathcal{P}$, l'ensemble des nombres premiers est infini.

**Preuve :**
Par l'absurde, supposons que $\mathcal{P}$ est un ensemble fini.
On peut l'écrire en extension.

D'où $r \in \mathbb{N}^*$ tq $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, ..., p_r\}$
J'envisage $N = p_1 \times p_2 \times ... \times p_r + 1$
D'après le théorème $\star$, $N \geq 2$
Donc $N$ admet un diviseur premier
d'où un certain $k \in \{1, ..., r\}$ tq $p_k | N$
or $p_k$ divise $p_1 \times ... \times p_r$

Donc $p_k$ divise $N - p_1 \times ... \times p_r$
Donc $p_k$ divise 1, donc $p_k \leq 1$
Or $p_k$ est premier, donc $p_k \geq 2$

D'où la contradiction et le résultat.

### 5. Qu'appelle-t-on condition nécessaire pour qu'une assertion soit vraie ? condition suffisante ? CNS ?

**Définition**

On appelle condition nécessaire (CN) pour que "$p$" soit vraie toute assertion $\mathcal{N}$ que l'on déduit de $p$ i.e. tq "$p \Rightarrow \mathcal{N}$" est vraie

**Définition**

On appelle condition suffisante (CS) pour que "$p$" soit vraie toute assertion $\mathcal{S}$ qui implique $p$ i.e. tq $\mathcal{S} \Rightarrow p$ soit vraie

**Définition**

On appelle condition nécessaire et suffisante (CNS) pour que $p$ soit vraie toute assertion $q$ tq $p \Leftrightarrow q$ est vraie

### 6. RÉDACTION : Comment rédiger les réponses aux énoncés suivants :
### - “Prouver que : $\forall x \in E, \mathcal{P}(x)$". “Prouver que : $\exists x \in E, \mathcal{P}(x)$".
### - “Prouver l'inclusion de deux ensembles. Montrer que $A \subset B$"
### - “Prouver l'égalité de deux ensembles. Montrer que $A = B$"
### - “Prouver une équivalence."
### - “Faire un raisonnement par l'absurde".
### - Trouver l'ensemble des $x \in E$ qui vérifient $\mathcal{P}(x)$ par analyse/synthèse.

1. Prouver une implication. Pour montrer que $p \Rightarrow q$

SUPPOSONS P ... MONTRONS q

2. Prouver une équivalence. Pour montrer que $p \Leftrightarrow q$

On procède par double implication.
- $\Rightarrow$ : Supposons $p$, montrons $q$ ...

- $\Leftarrow$ : Réciproquement, supposons $q$, montrons $p$ ...

- Conclusion : on a bien $p \Leftrightarrow q$

3. Prouver un résultat pour tout $x$. Pour montrer que $\forall x \in E, \mathcal{P}(x)$

Soit $x \in E$, montrons que $x$ vérifie $\mathcal{P}$

4. Prouver qu'il existe un certain $x$ qui vérifie une propriété. Pour montrer que $\exists x \in E, \mathcal{P}(x)$

- Si on réussit à exhiber un tel $x$.
  On pose : $x = ...$ Montrons que $x$ vérifie la propriété $\mathcal{P}(.)$

— Si on y arrive pas, faire un raisonnement par l'absurde :
Par l'absurde. Dans le cas contraire $\forall x \in E, non(\mathcal{P}(x))$
Donc ... [On cherche une contradiction]
D'où la contradiction et le résultat.

5. Prouver une inclusion d'ensembles. Montrer que $A \subset B$

Soit $x \in A$, montrons que $x \in B$

6. Prouver une égalité d'ensembles. Montrons que $A = B$ (où $A$ et $B$ sont les ensembles).

On procède par double inclusion.

— Montrons que $A \subset B$ : Soit $x \in A$, montrons que $x \in B$ ...

— Montrons que $B \subset A$ : Soit $x \in B$, montrons que $x \in A$

— Conclusion : on a bien l'égalité des ensembles ($A = B$)

7. Analyse/Synthèse

On se donne un ensemble de $E$ et une propriété $\mathcal{P}(.)$ sur cet ensemble.

On cherche l'ensemble des $x \in E$ tq $x$ vérifie $\mathcal{P}$

Analyse :
On cherche les conditions nécessaires pour que $x$ vérifie $\mathcal{P}$, le plus possible, de façon à aboutir à un portrait robot des $x$ qui peuvent potentiellement vérifier $\mathcal{P}$.

Synthèse :
Réciproquement, on se donne un $x$ qui satisfait le portrait robot établi dans l'analyse, et on vérifie si (oui ou non), il satisfait la propriété $\mathcal{P}$ i.e. on vérifie si le portrait robot est une condition suffisante.

Conclusion :
Les $x$ trouvés à la fin de la synthèse sont exactement ceux qui vérifient $\mathcal{P}$.

— La synthèse nous dit qu'ils vérifient bien $\mathcal{P}$

— L'analyse nous garantit qu'il y en a pas d'autre.

## 7. Soient $E$ et $F$ deux ensembles. Qu'est ce que l'identité de $E$. On suppose $F \subset E$. Définir l'injection canonique de $F$ dans $E$.

**Définition**

Si $E$ est un ensemble, on peut envisager la fonction identité de $E$

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Id} : & E & \to & E \\ & x & \mapsto & x \end{array}$$

**Définition**

Soient $E$ un ensemble, $F \subset E$ une partie de $E$
On appelle injection canonique de $F$ dans $E$ l'application

$$i : \begin{array}{ccc} F & \to & E \\ x & \mapsto & x \end{array}$$

### 8. Soit $f : E \to F$. définir l'image de $f$. Quelle est la différence entre l'image et le but ?

**Définition**

Soit $f : E \to F$ une fonction ($f \in \mathscr{F}(E, F)$)
On appelle image de $f$ l'ensemble

$$\operatorname{Im} f = \{y \in F / \exists x \in E, y = f(x)\}$$

C'est l'ensemble des éléments du but qui admettent au moins un antécédent.
De façon équivalente

$$\operatorname{Im} f = \{f(x)/x \in E\}$$

### 9. Soit $f : E \to F$. Définir la pré-image par $f$ d'une partie $L$ de ...

**Définition**

Soient $f : E \to F$ une application, $L \subset F$ une partie du but.
On appelle pré-image de $L$ par $f$ l'ensemble noté

$$f^{-1}(L) = \{x \in E/f(x) \in L\}$$

### 10. Donner deux définitions équivalentes d'une injection. Énoncer ceci en termes d'antécédents. Dans la pratique, comment rédige-t-on classiquement la preuve du fait que $f$ est injective.

**Définition**

$$\forall (x, x') \in E^2, (x \neq x') \Rightarrow (f(x) \neq f(x')) \Leftrightarrow \forall (x, x') \in E^2, (f(x) = f(x')) \Rightarrow (x = x')$$

Une telle applications sera dite injective. On dit que c'est une injection de $E$ dans $F$.

**Théorème**

Si $E$ et $F$ sont des ensembles non vides, alors $f$ est injective ssi $f$ est inversible à gauche i.e. $\exists g : F \to E$ tq $g \circ f = \mathrm{Id}_E$

**Rédaction : $f$ est injective**

Soient $x$ et $x'$ dans $E$ tq $f(x) = f(x')$.
Montrons que $x = x'$

**11. SAVOIR REFAIRE : Montrer que $f$ est injective ssi elle est inversible à gauche.**

**Théorème**

Si $E$ et $F$ sont des ensembles non vides, alors $f$ est injective ssi $f$ est inversible à gauche i.e. $\exists g : F \to E$ tq $g \circ f = \mathrm{Id}_E$

**Preuve :**
On procède par double implication.

Supposons qu'il existe $g : F \to E$ tq $g \circ f = \mathrm{Id}_E$.
Montrons que $f$ est injective.

Soient $x$ et $x'$ dans $E$ tq $f(x) = f(x')$
Montrons que $x = x'$
On applique $g$ : $g\left[f(x)\right] = g\left[f(x')\right]$
i.e. $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$
or $g \circ f = \mathrm{Id}_E$, donc $x = x'$
Ainsi $f$ est injective.

Réciproquement, supposons que $f$ est injective.
Il s'agit de construire une fonction $g : F \to E$ tq $g \circ f = \mathrm{Id}_E$
Soit $y \in F$ on veut définir $g(y)$

$1^{\text{er}}$ **cas :** on suppose que $y \in \operatorname{Im} f$

D'où un certain $x \in E$ tq $y = f(x)$
On pose alors $g(y) = x$
$g(x)$ est bien défini car $f$ est injective i.e. un tel $x \in E$ est unique.
À ce stade on a déjà assuré le fait que $\forall x \in E, g[f(x)] = x$

$2^{\text{ème}}$ **cas :** On suppose que $y \notin \operatorname{Im} f$
On a supposé que $E \neq \emptyset$, d'où un certains $x_0 \in E$
On pose alors $g(y) = x_0$
D'où $g : F \to E$ bien définie et d'après $\forall x \in E, g[f(x)] = x$ on a $g \circ f = \mathrm{Id}_E$

**12. Donner deux définitions équivalentes d'une surjection. Énoncer ceci en termes d'antécédents. Dans la pratique, comment rédige-t-on classiquement la preuve du fait que $f$ est surjective. Caractériser les surjections.**

**Définition**

1. $\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$

2. Tout élément du but de $f$ admet au moins un antécédent.

3. $\operatorname{Im} f = F$ i.e. l'image est égale au but.

**Théorème**

Soient $E$ et $F$ non vides et $f : E \to F$, alors $f$ est surjective ssi $f$ est inversible à droite i.e. $\exists g : F \to E$ tq $g \circ f = \mathrm{Id}_E$

**Rédaction : $f$ est surjective**

Soit $y \in F$
On pose $x = ... \in E$
Vérifions que $y = f(x)$

### 13. Donner trois définitions équivalentes d'une bijection. Comment définit-on la réciproque.

**Théorème**

Soient $E$ et $F$ des ensembles, $f : E \to F$
Alors
1. $\forall y \in F, \exists! x \in E, y = f(x)$
2. Tout élément du but de $f$ admet un unique antécédent par $f$.
3. $f$ est injective et surjective.
4. $\exists g : F \to E$ tq $\begin{matrix} f \circ g = \mathrm{Id}_F \\ g \circ f = \mathrm{Id}_E \end{matrix}$

On dit alors que $f$ est bijective/ une bijection
Par ailleurs, lorsque c'est le cas, une telle fonction $g$ est unique. On l'appelle la réciproque de $f$ est on la note $g = f^{-1}$

### 14. Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont des bijections, quelle est la réciproque de $g \circ f$ ?

**Théorème**

La composé de deux fonctions injectives est encore injective.
La composé de deux fonctions surjectives est encore surjective.
La composé de deux fonctions bijectives est encore bijective.

Par ailleurs si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont bijectives
Alors $g \circ f : E \to G$ est encore bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

### 15. Qu'est ce qu'une involution ?

**Définition**

Soit $E$ un ensemble
On appelle involution de $E$ toutes applications $f : E \to E$ tq $f \circ f = \mathrm{Id}_E$

**16. SAVOIR REFAIRE : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Vrai ou faux : "$f$ injective $\Rightarrow f$ strictement monotone" ? Et avec "bijective" ? Réciproque ?**

**17. Soient $f : E \to F$, $A$ et $B$ des parties de $E$ et $A'$ et $B'$ des parties de $F$. Parmi les 4 égalités suivantes, laquelle n'est en fait qu'une inclusion en général ? Dans quel sens ?**

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)? \qquad f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)?$$

$$f^{-1}(A' \cup B') = f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B') \qquad f^{-1}(A' \cap B') = f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$$

$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ n'est qu'une inclusion.

**18. SAVOIR REFAIRE : Mêmes notations. Comparer $f(f^{-1}(A'))$ et $A'$. Puis $f^{-1}(f(A))$ et $A$.**