I) Auto-test : Matrices OELC - Système linéaire

1. Définir les matrices de dilatation, transposition, transvection.

Définition (Matrice de dilatation)

Si $\alpha \in K$, on note $D_i(\alpha) = \begin{array}{c} \begin{matrix} & & & i & & & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & 0 & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \alpha & & & \\ & & & & 1 & & \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$

Définition (Matrice de transposition)

T_{ij} est la matrice obtenue en faisant à I_n la transformation $L_i \leftrightarrow L_j$ (ou $C_i \leftrightarrow C_j$)

$$T_{ij} = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} & & & i & & & & j & & & \end{matrix} \\ \begin{matrix} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \\ \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & & & \vdots & & & & \vdots & & & \\ & \ddots & & \vdots & & & & \vdots & & & \\ & & 1 & \vdots & & & & \vdots & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & & & \\ & & & \vdots & 1 & & & & & & \\ & & & \vdots & & \ddots & & & & & \\ & & & \vdots & & & 1 & & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & 1 & & & & 0 & & & \\ & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Définition (Matrice de transvection)

Si $\lambda \in K$ et $i \neq j$, on note $V_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij}$ où E_{ij} est la matrice élémentaire avec $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$

$$V_{ij}(\lambda) = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} & & & j & \end{matrix} \\ \begin{matrix} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & & & \vdots & \\ & \ddots & & \vdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \lambda & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

2. Qu'est ce qu'un système linéaire compatible ? incompatible ? Donner la forme générale des solutions d'un système linéaire.

Notations :
$A \in M_n(\mathbb{R}) \to f_A \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^p;\mathbb{R}^n)$

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \to x = (x_1, ..., x_p) \in \mathbb{R}^p$

$Y = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \to y = (b_1, ..., b_n) \in \mathbb{R}^n$

$(S) \leftrightarrow AX = Y \leftrightarrow f_A(x) = y$ (équation affine)

y est fixée f_A est donnée. Il s'agit de chercher les antécédents de y par f_A.
D'après le cours sur les espaces vectoriel de dimension finie :
1^{er} cas : Si $y \notin \mathrm{Im}(f_A)$, alors (S) n'a pas de solution. On dit que le système est incompatible.

$2^{\text{ème}}$ cas : Si $y \in \mathrm{Im}(f_A)$: Alors $\mathscr{S}$ est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^p$ dirigé par $\ker(f_A)$ (système compatible). Si $u = (u_1, ..., u_p)$ est une solution particulière de $\mathscr{S}$ alors $\mathscr{S} = u + \ker(f_A)$ (translaté)

Définition Forme générale d'un système linéaire :
Données : $(b_1, ..., b_n) \in \mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$) et $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ où $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{N}^*$

Système :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + ... + a_{2p}x_p = b_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + ... + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

Ensemble des solutions :

$$\mathscr{S} = \{(x_1, ..., x_p) \in \mathbb{R}^p \text{ satisfaisant } (S)\}$$

3. Qu'est ce qu'un système de Cramer ?

Définition

Lorsque $n = p$ (autant d'équations que d'inconnus) et lorsque A est inversible alors on dit que le système est de Cramer.

4. Calcul de l'inverse du rang d'une matrice, résolution de systèmes linéaires, via des OELC et le pivot de Gauss (exemple laissés au colleur en exercice)