I) Auto-test : Le groupe symétrique

1. Définir σ_n et donner son cardinal. Qu'est ce qu'une permutation ? Définir son support.

Définition

L'ensemble σ_n des permutations de $\{1, ..., n\}$ est l'ensemble des bijections de $\{1, ..., n\}$ dans $\{1, ..., n\}$.

Notation : $\sigma \in \sigma_n$ se note $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$

$\text{card}(\sigma_n) = n!$

Définition

Une permutation de $\{1, ..., n\}$ est une bijection de $\{1, ..., n\}$ dans $\{1, ..., n\}$.

Définition

Si $\sigma \in \sigma_n$, on appelle support de σ l'ensemble des éléments de $\{1, ..., n\}$ qui ne sont pas invariant par σ

$$\sup(\sigma) = \{k \in \{1, ..., n\} / \sigma(k) \neq k\}$$

2. Décrire explicitement σ_3. Comment êtes-vous sûr(e) de n'avoir rien oublié ?

$\text{card}(\sigma_3) = 3 = 6$

On distingue clairement : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ (Id$\{1, 2, 3\}$) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ "Transposition" qui échange 1 et 2

On a deux autres transpositions : $(1, 3)$ échange 1 et 2, $(2, 3)$ échange 2 et 3.

Il nous reste $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Cela nous fait bien 6 éléments. Il n'y en a pas d'autres

$$\sigma_3 = \{\text{Id}; (1, 2); (1, 3); (2, 3); (1, 2, 3); (1, 3, 2)\}$$

3. Définition d'une transposition.

Définition

Soit $n \geq 2$
On appelle transposition de σ_n une permutation τ qui échange 2 éléments i et j de $\{1, ..., n\}$ et qui fixe les autres.
i.e. τ est une transposition de σ_n ssi $\exists i \neq j$ dans $\{1, ..., n\}$ tels que $\tau(i) = j$, $\tau(j) = i$ et $\tau(k) = k$ si $k \notin \{i, j\}$

On note $\tau = (i, j)$

4. SAVOIR REFAIRE : preuve de la décomposition d'une permutation en produit de transpositions.

Théorème

Si $n \geq 2$, alors toute permutation de σ_n peut s'écrire comme un produit de transposition

Preuve :
Par récurrence sur $n \geq 2$
Initialisation : $n = 2$, $\sigma_2 = (\text{Id}; (1,2))$
On note $\tau = (1,2)$
$\tau = \tau$ et $\text{Id} = \tau \circ \tau$
Le résultat est vrai pour $n = 2$

Hérédié : supposons que σ_n est engendré par les transpositions. Montrons qu'il en va de même pour σ_{n+1}. On note $E_{n+1} = \{1, ..., n+1\}$. Soit $\sigma \in \sigma_{n+1}$

1^{er} cas : si $\sigma(n+1) = n+1$, soit $\tilde{\sigma}$ la restriction de σ à $E_m = \{1, ..., n\}$.
On a $\tilde{\sigma}(E_n) \subset E_n$ et $\tilde{\sigma}$ est encore injective (donc bijective). Ainsi $\tilde{\sigma} \in \sigma_n$
D'où la transpositions $\tilde{\tau}_1, ..., \tilde{\tau}_p$ de σ_n telles que : $\tilde{\sigma} = \tilde{\tau}_1 \circ ... \circ \tilde{\tau}_p$ (par hypothése de récurrence).
On prolonge chaque $\tilde{\tau}_k$ en une transposition τ_k de σ_{n+1} en posant $\tau_k(n+1) = n+1$.
On a alors $\sigma = \tau_1 \circ ... \circ \tau_p$ (égalité vrai sur E_n et aussi en $n+1$)

2^{nd} cas : si $\sigma(n+1) \neq n+1$ i.e. $\sigma(n+1) = m \leq n$
Soit $\tau = (m; n+1)$. On pose $\tilde{\sigma} = \tau \circ \sigma = \tau_1 \circ ... \circ \tau_p$
Ainsi $\tilde{\sigma}(n+1) = n+1$, d'où d'après le 1^{er} cas des transpositions $\tau_1, ..., \tau_p$ de σ_{n+1} telles que $\tilde{\sigma} = \tau_1 \circ ... \circ \tau_q$ i.e. $\tau \circ \sigma = \tau_1 \circ ... \circ \tau_q$ et en composant à gauche par $\tau^{-1} = \tau$ on obtient $\sigma = \tau \circ \tau_1 \circ ... \circ \tau_q$, ce qui achève la récurrence.

5. Définition d'un cycle et propriétés élémentaires. Décomposer le cycle $(1,2,3,4)$ en produit de transpositions.

Définition

Soient $n \geq 2, p \geq 2$ et $a_1, ..., a_p$ des éléments distinces de $[\![1; n]\!]$.
L'application σ défini e par
1. $\forall k \notin \{a_1, ..., a_p\}, \sigma(k) = k$
2. $\forall i \in [\![1, p-1]\!], \sigma(a_i) = a_i + 1$
3. $\sigma(a_p) = a_1$

est une permutation de $\{1, ..., n\}$ noté $(a_1, ..., a_p)$. Une telle permutation est appelée un $p-$cycle i.e cycle de longueur p.

Théorème (Propriétés)

1. $\sup(a_1, ..., a_p) = \{a_1, ..., a_p\}$
2. Si σ est un $p-$cycle alors $\sigma^p = \underbrace{\sigma \circ ... \circ \sigma}\, p$ fois $= \text{Id}$
3. Si $\sigma = (a_1, ..., a_p)$ alors $\sigma^{-1} = (a_p, a_{p-1,...,a_1})$

$(1,2,3,4) = (1,2) \circ (2,3) \circ (3,4)$

6. Qu'est ce le conjugué d'une permutation par un autre ?

Théorème (Propriétés)

Le conjugué d'un cycle par une permutations :
$\forall \sigma \in \sigma_n,\ \sigma \circ (a_1, ..., a_p) \circ \sigma^{-1} = (\sigma(a_1), ..., \sigma(a_p))$
c'est le "conjugué" de $(a_1, ..., a_p)$ par σ

7. Énoncer le théorème de décomposition en produit de cycles. L'appliquer à $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

Théorème (Décompostion en produit de cycles)

Soit $n \geq 2$. Toute permutation de σ_n est produit de cycles à supports disjoints.

- Ce produit est commutatif
- Cette décomposition est unique, à l'ordre prés des facteurs.

$$\begin{aligned} \sigma &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \\ &= (1,3) \circ (2,4,5) \\ &= ((2,4,5) \circ (1,3)) \\ &= (1,3) \circ (2,4) \circ (4,5) \end{aligned}$$

8. Calculer σ^{201} où $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \sigma &= (1,7) \circ (2,6) \circ (3,5) \\ \sigma^{201} &= (1,7)^{201} \circ (2,6)^{201} \circ (3,5)^{201} \qquad \text{car ils commutent} \\ &= (1,7) \circ (2,6) \circ (3,5) \qquad \text{car 201 est impair} \end{aligned}$$

9. Définir la signature via le nombre d'inversions.

Définition (Nombre d'inversion d'une permutation)

Soit $\sigma \in \sigma_n$. On dit que le couple rangé (i,j) avec $i < j$ présente une inversion lorsque $\sigma(i) > \sigma(j)$. On note alors I_σ leur nombre.

$$I_\sigma = \text{card}\{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2 / i < j \text{ et } \sigma(i) > \sigma(j)\}$$

Définition (Signature)

Si $\sigma \in \sigma_n$, on appelle signature de σ le nombre $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{I_\sigma} \in \{\pm 1\}$
- σ est dite paire si $\varepsilon(\sigma) = 1$
- σ est dite impaire si $\varepsilon(\sigma) = -1$

10. Énoncer les propriétés de morphisme de groupe de la signature.

Théorème

Si σ et σ' sont dans σ_n, alors $\varepsilon(\sigma \circ \sigma') = \varepsilon(\sigma) \times \varepsilon(\sigma')$ i.e. $\varepsilon : (\sigma_n; \circ) \to (\{\pm 1\}; \times)$ est un morphisme de groupes.

En particulier : $\varepsilon(\mathrm{Id}) = 1$ et $\varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma)$

11. Quelle est la signature d'un cycle ? d'une transposition ?

La signature d'une transposition est -1

Théorème

La signature d'un $p-$cycle est $(-1)^{p-1}$

12. Calculer la signature de $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 5 & 6 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

On décompose σ en produit de cycles : $\sigma = (1,4,6) \circ (2,7) \circ (3,5)$
ε est un morphisme de groupe d'où $\varepsilon(\sigma) = (-1)^2 \times (-1) \times (-1) = 1$

13. Définition du groupe alterné $\mathscr{A}_n$

Définition

L'ensemble des permutations paires de σ_n, noté $\mathscr{A}_n$ est un sous groupe de σ_n, appelé groupe alterné.

14 SAVOIR REFAIRE : montrer que $\mathrm{card}(\mathscr{A}_n) = \dfrac{n!}{2}$.

Montrons que $\mathrm{card}(\mathscr{A}_n) = \dfrac{n!}{2}$
1. $\mathscr{A}_n$ est le noyeau de ε : $\mathscr{A}_n = \{\sigma \in \sigma_n / \varepsilon(\sigma) = 1\}$ i.e. $\mathscr{A}_n = \varepsilon^{-1}(\{1\})$, c'est donc un sous groupe de σ_n

2. Si on note $\mathscr{I}_n$ les permutations impaires de σ_n
Alors $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathscr{A}_n & \to & \mathscr{I}_n \\ \sigma & \mapsto & (1,2) \circ \sigma \end{array}$ est bien définie et c'est une bijection.

Donc $\text{card}(\mathscr{A}_n) = \text{card}(\mathscr{I}_n)$ et $\sigma_n = \mathscr{A}_n \bigsqcup \mathscr{I}_n$
d'où $\text{card}(\mathscr{A}_n) = \dfrac{n!}{2}$