I) Auto-test : Les Déterminants

1. Donner la définition du déterminant d'une matrice carrée (avec la signature).

Définition

Si $A \in M_n(K)$ ($n \in \mathbb{N}^*$, matrice carré) on définit son déterminant par

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \sigma_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \times ... \times a_{\sigma(n)n}$$

où $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$

2. Comment le déterminant caractérise-t-il les matrices inversibles ?

Théorème (1)

$A \in M_n(K)$ est inversible ssi $\det(A) \neq 0$
Le déterminant détecte les matrices inversibles

$$\det(A) = 0 \Leftrightarrow A \text{ non inversible}$$

3. SAVOIR REFAIRE : multiplicativité du déterminant. Énoncer, puis donner et prouver les corollaires (on attend $\det(\lambda A)$ où $\lambda \in K$, déterminant de l'inverse et de deux matrices semblables).

Théorème (Multiplicativité du déterminant)

Soient A et B dans $M_n(k)$
Alors $\det(A \times B) = (\det(A) \times (\det(B))$

Corollaire

1. Si $\lambda \in K$ et $A \in M_n(K)$ alors
$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$$
2. Si $A \in \mathrm{GL}_n(k)$, alors $\det(A) \neq 0$ et
$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$
3. Si $A \sim B$ (matrice semblable) alors $\det(A) = \det(B)$
i.e. le déterminant est un invarient de similitude.

Preuve :
1.

$$\begin{aligned} \det(\lambda A) &= \det((\lambda I_n) \times A) \\ &= \det(\lambda I_n) \times \det(A) \\ &= \lambda^n \det(A) \end{aligned}$$

2. Selon le théorème 1 $\det(A) \neq 0$, $A \times A^{-1} = I_n$
donc

$$\begin{array}{rcl} \det(A \times A^{-1}) & = & \det(I_n) \\ \det(A) \times \det(A^{-1}) & = & 1 \\ \det(A^{-1}) & = & \dfrac{1}{\det(A)} \end{array}$$

3. Supposons que $A \sim B$
D'où un certain $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ tq $B = P^1 AP$
Donc

$$\begin{array}{rcl} \det(B) & = & \det(P^{-1}AP) \\ & = & \det(P^{-1}) \times \det(A) \times \det(P) \\ & = & \det(A) \qquad \text{d'après le 2.} \end{array}$$

4. Donner les règles de calcul élémentaires du déterminant (on attend : linéarité par rapport aux colonnes, permutations de colonnes, ajout d'une combinaison linéaire d'autres colonnes). A quoi peuvent servir ces règles en particulier ? (on attend : à faire apparaître un grand nombre de zéros avant de développer)

Théorème (3)

Soit $A \in M_n(K)$ $(n \in \mathbb{N}^*)$
Alors,
1. $\det(A)$ dépend linéairement de chaque colone de A.
En particulier : Zi $A = \begin{pmatrix} C_1 & | & \cdots & | & C_n \end{pmatrix}$
$\det\begin{pmatrix} \lambda C_1 & | & C_2 & | & \cdots & | & C_n \end{pmatrix} = \lambda \det\begin{pmatrix} C_1 & | & C_2 & | & \cdots & | & C_n \end{pmatrix}$
$\det\begin{pmatrix} C_1 + C_1' & | & C_2 & | & \cdots & | & C_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} C_1 & | & C_2 & | & \cdots & | & C_n \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} C_1' & | & C_2 & | & \cdots & | & C_n \end{pmatrix}$
2. Si on permute les colones de A par une permutation $\sigma \in \sigma_n$, alors $\det(A)$ est multiplié par sa signature $\varepsilon(\sigma)$
3. $\det(A)$ ne change pas si on ajoute à une colonne une combinaison linéaire des autres.

Ces régles servent à faire apparaître un grand nombre de zéro avant de développer.

5. Déterminant de la transposée. Énoncé et corollaire (on attend : les même règles de calcul sont valables sur les lignes)

Théorème

Si $A \in M_n(K)$ alors $\det({}^tA) = \det(A)$

Corollaire

Toutes les régles de calculs du théorème 3 sur les colonnes sont applicables aux lignes.

6. SAVOIR REFAIRE : Déterminant d'une matrice triangulaire supérieure et d'une matrice diagonale par blocs (Énoncé et preuve)

Théorème

$$\det \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = +\lambda_1 \times ... \times \lambda_{n+1}$$

Preuve :
Récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$
Initialisation : $n = 1$, $\det(\lambda_1) = \lambda_1$
Hérédité :

$$\det \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{n+1} \end{pmatrix} = +\lambda_1 \times \det \begin{pmatrix} \lambda_2 & & \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{n+1} \\ & = & \lambda_1 \end{pmatrix} \times ... \times \lambda_{n+1} \qquad \text{par hypothése de récurrence}$$

Théorème

Soit $M = \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$ où A, B, C sont des blocs, M, A, B sont carrés, A et B pas forcément de même taille

Preuve :
$A \in M_p(K)$ et $B \in M_q(K)$
On écrit

$$M = \left(\begin{array}{c|c} I_p & C \\ \hline 0 & B \end{array}\right) \times \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & I_q \end{array}\right)$$

Multiplicativité du déterminant :

$$\det(M) = \det \left(\begin{array}{c|c} I_p & C \\ \hline 0 & B \end{array}\right) \times \det \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & I_q \end{array}\right)$$

On développe par rapport à C_1

$$\det \left(\begin{array}{c|c} I_p & C \\ \hline 0 & B \end{array}\right) = \det \left(\begin{array}{c|c} I_{p-1} & \star \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$$

On développe successivement par rapport à C_2, ..., C_p

$$\det \left(\begin{array}{c|c} I_p & C \\ \hline 0 & B \end{array}\right) = \det(B)$$

De même on développe par rapport à C_{p+q}, ...,C_{p+1}

$$\det \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & I_q \end{array}\right) = \det(A)$$

7. SAVOIR REFAIRE : Determinant tridiagonal. Calculer le déterminant de taille $n \geq 2$, pour $\theta \in \mathbb{R}$

$$D^n(\theta) = \begin{vmatrix} 2\cos(\theta) & 1 & & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & & 1 & 2\cos(\theta) \end{vmatrix}$$

On développe par rapport à C_1 :

$$D_n = +2\cos(\theta)D_{n-1} - 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2\cos(\theta) & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2\cos(\theta) \end{vmatrix}$$

On développe par rapport à L_1

$$D_n = 2\cos(\theta)D_{n-1} - D_{n-2}$$

$\forall n \geq 2, D_n - 2\cos(\theta)D_{n-1} + D_{n-2} = 0$ i.e. $\forall n \geq 1, D_{n+2} - 2\cos(\theta)D_{n+1} + D_n = 0$
On reconnait une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
D'après le cours l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est un $\mathbb{R}-$plan vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{N}^*, \mathbb{R})$.
On en cherche une base sous la forme r^n où $r \in \mathbb{C}$.
$(u_n) \in \mathscr{S}$ ssi $r^2 - 2\cos(\theta)r + 1 = 0$ (EC)

1$^{\text{er}}$ cas : si $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$, alors $e^{i\theta} \in \mathbb{C}/\mathbb{R}$ donc $\Delta < 0$
Base de solution :

- $\Re(e^{i\theta n}) = \cos(n\theta)$
- $\Im(e^{i\theta n}) = \sin(n\theta)$

$$\mathscr{S} = \{\lambda\cos(n\theta) + \mu\sin(n\theta)/(\lambda;\mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

Calcul de D_n :
Condition initiales :

$$\begin{cases} n = 1 \qquad D_1 = |2\cos(\theta)| = 2\cos(\theta) \\ n = 2 \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2\cos(\theta) & 1 \\ 1 & 2\cos(\theta) \end{vmatrix} = 4\cos^2(\theta) - 1 \end{cases}$$

D'où λ et μ des réels tel que $D_n = \lambda\cos(n\theta) + \mu\sin(\theta n)$

$$(CI) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda\cos(\theta) + \mu\sin(\theta) & = & 2\cos(\theta) \\ \lambda\cos(2\theta) + \mu\sin(2\theta) & = & 4\cos^2(\theta) - 1 \end{cases}$$

Donc $\lambda = 2$ et $\mu = 0$

2$^{\text{nd}}$ cas : Si $\theta \in \pi\mathbb{Z}$, alors $\cos(\theta) = \pm 1$
Si $\cos(\theta) = 1$, $(\theta \in 2\pi\mathbb{Z})$
$(EC) : r^2 - 2r + A = 0 \Leftrightarrow (r-1)^2 = 0$
Racine double : $r = 1$

$$\mathscr{S} = \{(\lambda + \mu n)(1^n)/(\lambda;\mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

D'où λ et μ réel tq
$\forall n \in \mathbb{N}$, $D_n = \lambda + \mu n$

$$(CI) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu &= 2\cos(\theta) = 2 \\ \lambda + 2\mu &= 4\cos^2(\theta) - 1 = 3 \end{cases}$$

d'où $\lambda = 1$ et $\mu = 1$

2. Si $\cos(\theta) = -1$, racine double $r = -1$

$$\mathscr{S} = \{(\lambda + \mu n)(-1)^n / (\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

8. SAVOIR REFAIRE : Déterminant de Vandermonde. (savoir le reconnaître)
Soient $\lambda_1, ..., \lambda_n$ dans K $(n \in \mathbb{N}^*)$
On pose :

$$V(\lambda_1, ..., \lambda_n) = \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & & & & \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

1. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $V(\lambda_1, ..., \lambda_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i)$.
En rajoutant à C_n une combinaison linéaire des autres colonnes plus précisement en effectuant : $C_n \to C_N + a_0 + C_1 + a_1 C_2 + ... + a_{n-2} C_{n-1}$
Si on pose $P = a_0 + a_1 X + ... + a_{n-2} X^{n-2} + X^{n-1}$
Alors $V(\lambda_1, ..., \lambda_n) = \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & P(\lambda_1) \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & P(\lambda_2) \\ \vdots & & & & \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & P(\lambda_n) \end{vmatrix}$
On peut choisir $a_0, ..., a_{n-2}$ comme on le souhaite dans K. Donc on peut obtenir ainsi n'importe quel polynôme.
$P \in K[X]$ qui soit unitaire de degré (n-1).
On les choisit de sorte à faire apparaître des zéros dans C_n.
$P = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)...(X - \lambda_n)$
NB : C'est bien un polynôme unitaire de degré $(n-1)$
Ainsi $P(\lambda_1) = ... = P(\lambda_{n-1}) = 0$
Ainsi $V(\lambda_1, ..., \lambda_n) = \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & P(\lambda_n) \end{vmatrix}$
On développe par rapport à C_n

$$\begin{aligned} V(\lambda_1, ..., \lambda_n) &= P(\lambda_n) \wedge \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{n-2} \\ \vdots & & & \\ 1 & \lambda_{n-1} & \cdots & \lambda_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix} \\ &= \prod_{k=1}^{n-1} (\lambda_n - \lambda_k) V(\lambda_1, ..., \lambda_{n-1}) \end{aligned}$$

Par récurrence :

$$\begin{aligned} V(\lambda_1, ...\lambda_n) &= \underbrace{\prod_{k=1}^{n-1}(\lambda_n - \lambda_k)}_{\prod_{1\leq i\leq n}(\lambda_n)-\lambda_i} \times \underbrace{\prod_{k=1}^{n-2}(\lambda_{n-1} - \lambda_k)V(\lambda_1, ..., \lambda_{n-2})}_{\prod_{1\leq i\leq n-1}(\lambda_{n-1}-\lambda_i)} \\ &= ... \\ &= \prod_{1\leq i<j\leq n}(\lambda_j - \lambda_i)\underbrace{V(\lambda_1)}_{=1} \end{aligned}$$

D'où la formule.

2. $V(\lambda_1, ..., \lambda_n) = 0$ ssi des λ_k sont égaux.
$V(\lambda_1, ..., \lambda_n) \neq 0$ ssi les λ_k sont tous différents.

9. Qu'est ce qu'une application $n-$linéaire ?
Définition :
Soient E et F des K-espace vectoriel de dimension quelconque. Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{array}{rccl} f: & E^n & \to & F \\ & (\overrightarrow{x_1}, ..., \overrightarrow{x_n}) & \mapsto & f(\overrightarrow{x_1}, ..., \overrightarrow{x_n}) \end{array}$$

est dite n-linéaire ssi elle est linéaire par rapport à chacune des variables $x_1, ..., x_n$

On note $\mathscr{L}_n(E^n, F)$ leur ensemble

10. Qu'est ce qu'une forme $n-$linéaire alternée ? antisymétrique ? Comparer ces deux notions pour $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Définition :
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et E un K-espace vectoriel (quelconque). Soit $\begin{array}{rccl} f: & E^n & \to & K \\ & (x_1, ..., x_n) & \mapsto & f(_1, ..., x_n) \end{array}$ une forme n-linéaire
1. f est dite alternée ssi $f(x_1, ..., x_n) = 0$ dés que deux vecteurs x_i et x_j sont égaux.
2. f est dite antisymétrique ssi $\forall \sigma \in \sigma_n$, $\forall (x_1, ..., x_n) \in E^n$, $f(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) f(x_1, ..., x_n)$

On note $\mathscr{A}ltn(E)$ l'ensemble des formes n-linéaires alternées de E.

Pour $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, alors ces deux notions sont équivalentes.

11. Donner les propriétés des formes $n-$linéaires alternées sur un espace vectoriel quelconque.
Propriétés :
1. Elles sont antisymétriques
2. Si $x_1, ..., x_n)$ est une famille liée de E alors $f(x_1, ..., x_n) = 0$

12. Que dire de l'ensemble des formes $n-$linéaires alternées sur un espace vectoriel de dimension finie ? (on attend : c'est un espace vectoriel de dimension 1).
Si E est un K-espace vectoriel quelconque $\mathscr{A}ltn(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(E^n, K)$. Si de plus E est un K-espace vectoriel de dimension finie égale à n alors $\mathscr{A}ltn(E)$ est de dimension 1 i.e. toutes les formes n-linéaires alternées sur E^n sont proportionnelles.

13. Donner la définition du déterminant de n vecteurs d'un espace vectoriel de dimension n dans une base β. Que dire de la notation "$\det(x_1, ...x_n)$", où $x_1, ..., x_n$ désignent n vecteurs d'un espace vectoriel de dimension n.
Définition :
Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie égale à n, β une base de E, $\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n}$ des vecteurs de E.
On appelle déterminant de ces vecteurs dans la base β le scalaire

$$\det_\beta(\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n}) = \det(\mathrm{Mat}_\beta(\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n}))$$

14. Comment le déterminant permet-il de repérer les familles bases ?

Théorème (Reconnaissance des bases)

Soient E un $K-$espace vectoriel de dimension fini égale à n, β une base de E
Soient $(\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n})$ une famille de vecteurs de E
Alors $(\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n})$ est une base de E ssi $\det_\beta(\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n}) \neq 0$

15. Donner la formule de changement de base pour les déterminants.

Théorème (Changement de base de determinant)

$$\det_{\beta'}(.) = \det_{\beta'}(\beta) \times \det_{\beta}(.)$$

16. Définir le déterminant d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Donner les propriétés essentielles.

Définition

Soiet E un $K-$espace vectoriel de dimension fini égale a n, $u \in \mathscr{L}(E)$
Si β est une base quelconque de E, on définit le déterminant de l'endomorphisme u par

$$\det(u) = \det_{\beta}(u(e_1), ..., u(e_n))$$

où $\beta = (e_1, ..., e_n)$

Théorème

1. Cette définition ne dépend pas de la base choisie.

2. Si $(x_1, ..., x_n)$ est une famille de vecteurs de E alors

$$\det_{\beta}(u(x_1), ..., u(x_n)) = \det_{u} \times \det_{\beta}(x_1, ..., x_n)$$

17. Donner le lien précis entre le déterminant d'une matrice, celui d'une famille de vecteurs et celui d'un endomorphisme.

Théorème

1. Si $A = (C_1|...|C_n)$, si β_n désigne la abse cannonique de $M_n(K)$. Alors $\det(A) = \det_{\beta_n}(C_1|...|C_n)$
$A \to f_A \in \mathscr{L}(K^n)$ alors $\det(A) = \det(f_A)$

2. Soient $x_1, ..., x_n$ des vecteurs d'un $K-$espace vectoriel E de dimension fini égale à n et β une base de E.
Alors
$$\det_\beta(x_1, ..., x_n) = \det(\mathrm{Mat}_\beta(x_1, ..., x_n))$$

3. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ où E est un $K-$espace vectoriel de dimension fini égale à n.
Soit $\beta = (e_1, ..., e_n$ une base de E
Alors
$$\det(u) = \det([u]_\beta) = \det_\beta(u(e_1), ..., u(e_n)$$

18. Définir la comatrice d'une matrice carrée A, puis donner le lien entre sa transposée et A.

Définition

Soit $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$
Rappelons que le vofacteur A_{ij} de a_{ij} est le scalire
$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\det(M_{ij})$$
où M_{ij} est la matrice de $M_{n-1}(K)$ obtenue en supprimant le $i^{\text{ème}}$ ligne de A et la $j^{\text{ème}}$ colonnes.
On a alors $\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}Aik$ développement de A par rapport à la $i^{\text{ème}}$ ligne, $\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}$ par rapport a la $j^{\text{ème}}$ colonne.
On appelle comatrice de A la matrice $C \in M_n(K)$ définie par $C = [A_{ij}]_{1\leq i,j\leq n}$ c'est la matrice des cofacteurs.

On note $A^\dagger$ sa transposé.
$$A^\dagger = {}^tC = [A_{ij}] \qquad \text{"}A\text{ dague"}$$

19. Que signifie "orienter" un espace vectoriel de dimension finie ?

Définition

On dit que le $\mathbb{R}-$espace vectoriel E est orienté si on a choisit une base β_0 de E. Cette base est dite directe. Si β estune autre base de E, on dit que :

- β est directe si $\det_{\beta_0}(\beta) > 0$
- β est indirecte si $\det_{\beta_0}(\beta) < 0$