I) Auto-test : Fonctions usuelles (II)

1. Formule trigonométrique : circulaire et hyperbolique.

Définition	
$\cos(x) = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ $\sin(x) = \dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$ $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$	$\mathrm{ch}(x) = \dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$ $\mathrm{sh}(x) = \dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$ $\mathrm{ch}^2(x)-\mathrm{sh}^2(x)=1$
Duplication	
$\cos(2x) = \cos^2(x)-\sin^2(x)$ $= 2\cos^2(x)-1$ $= 1-2\sin^2(x)$ $\sin(2x) = 2\sin(x).\cos(x)$	$\mathrm{ch}(2x) = \mathrm{ch}^2(x)+\mathrm{sh}^2(x)$ $= 2\,\mathrm{ch}^2(x)-1$ $= 1+2\,\mathrm{sh}^2(x)$ $\mathrm{sh}(2x) = 2\,\mathrm{sh}(x).\mathrm{ch}(x)$
Linéarisation	
$\cos^2(x) = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$ $\sin^2(x) = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$	$\mathrm{ch}^2(x) = \dfrac{1+\mathrm{ch}^2(x)}{2}$ $\mathrm{sh}^2(x) = \dfrac{\mathrm{ch}(2x)-1}{2}$
Somme	
$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$ $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$ $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b)+\sin(b)\sin(a)$ $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b)-\sin(b)\cos(a)$ $\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$	$\mathrm{ch}(a+b) = \mathrm{ch}(a)\,\mathrm{ch}(b)+\mathrm{sh}(a)\,\mathrm{sh}(b)$ $\mathrm{ch}(a-b) = \mathrm{ch}(a)\,\mathrm{ch}(b)-\mathrm{sh}(a)\,\mathrm{sh}(b)$ $\mathrm{sh}(a+b) = \mathrm{sh}(a)\,\mathrm{ch}(b)+\mathrm{sh}(b)\,\mathrm{ch}(a)$ $\mathrm{sh}(a-b) = \mathrm{sh}(a)\,\mathrm{ch}(b)-\mathrm{sh}(b)\,\mathrm{ch}(a)$ $\mathrm{th}(a+b) = \dfrac{\mathrm{th}(a)+\mathrm{th}(b)}{1+\mathrm{th}(a)\mathrm{th}(b)}$
Somme $\to$ produit (sicocosicoco -sisi)	
$\sin(a)+\sin(b) = 2\sin\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\cos\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$ $\sin(a)-\sin(b) = 2\cos\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\sin\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$ $\cos(a)+\cos(b) = 2\cos\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\cos\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$ $\cos(a)-\cos(b) = -2\sin\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\sin\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$	$\mathrm{sh}(a)+\mathrm{sh}(b) = 2\,\mathrm{sh}\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\mathrm{ch}\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$ $\mathrm{sh}(a)-\mathrm{sh}(b) = 2\,\mathrm{ch}\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\mathrm{sh}\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$ $\mathrm{ch}(a)+\mathrm{ch}(b) = 2\,\mathrm{ch}\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\mathrm{ch}\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$ $\mathrm{ch}(a)-\mathrm{ch}(b) = 2\,\mathrm{sh}\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\mathrm{sh}\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$
Produit $\to$ somme	
$\sin(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}[\sin(a+b)+\sin(a-b)]$ $\cos(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}[\cos(a+b)+\cos(a-b)]$ $\sin(a)\sin(b) = -\dfrac{1}{2}[\cos(a+b)-\cos(a-b)]$	$\mathrm{sh}(a)\,\mathrm{ch}(b) = \dfrac{1}{2}[\mathrm{sh}(a+b)+\mathrm{sh}(a-b)]$ $\mathrm{ch}(a)\,\mathrm{ch}(b) = \dfrac{1}{2}[\mathrm{ch}(a+b)+\mathrm{ch}(a-b)]$ $\mathrm{sh}(a)\,\mathrm{sh}(b) = \dfrac{1}{2}[\mathrm{ch}(a+b)-\mathrm{ch}(a-b)]$

2. SAVOIR REFAIRE : Que dire des graphes de f et de f^{-1} lorsque f est bijective ? Prouvez-le.

Théorème

Soient I et J des intervalles de $\mathbb{R}$, $f : I \to J$ une fonction bijective.
Alors les graphes de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite $\Delta_1 : y = x$

Preuve :
Rappel : le graphe de f est $G_f = \{x; f(x)/x \in I\} \subset I \times J \subset \mathbb{R}^2$

symétrie par rapport à $\Delta_1 : s : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x; y) & \mapsto & (y; x) \end{array}$

Échange de coordonnées :
Soit $x \in I$. Ainsi $(x, f'(x)) \in \mathscr{C}_f$
On pose $y = f(x)$ i.e. $x = f^{-1}(y)$

$$s\left[x, f(x)\right] = (f(x), x) = (y; f^{-1}(y)) \in \mathscr{C}_{f^{-1}}$$

3. Énoncer le théorème de la bijection continue.

Théorème (de la bijection continue)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone sur I.
Alors
1. $f(I) = J$ un intervalle de $\mathbb{R}$
2. f réalise une bijection de I sur J ($f|_I^J$ est bijective)
3. La réciproque $f^{-1} : J \to I$ est automatiquement continue.

4. Énoncer le théorème de la bijection dérivable en donnant la formule pour la dérivée de la bijection réciproque. Que dire pour f^{-1} lorsque f' s'annule en $x \in \mathbb{R}$

Théorème (de la bijection dérivable)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ supposée dérivable.
On suppose : $\forall x \in I, f'(x) > 0$
Alors 1. $f(I) = J$ un intervalle
2. f réalise une bijection de I sur J
3. La réciproque $f^{-1} : J \to I$ est aussi dérivable et

$$\forall x \in J, \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left[f^{-1}(x)\right]}$$

Formule pour $\left(f^{-1}\right)'$
- on ne divise pas, car $f' > 0$ sur I
- on l'obtient en dérivant la relation

$\forall x \in J, f\left[f^{-1}(x)\right] = x$
$\forall x \in J, \left(f^{-1}\right)'(x) \times f'\left[f^{-1}(x)\right] = 1$
Cette dernière équation prouve que si f^{-1} est dérivable en $x \in J$, alors si $y = f^{-1}(x)$, alors $f'(y) \neq 0$.

Lorsque f' s'annule en $x \in \mathbb{R}$ alors f^{-1} n'est pas dérivable.

5. SAVOIR REFAIRE : fonction racine cubique

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 \end{array}$

f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ ($\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 3x^2 \geq 0$ et $f'(x) = 0$ ssi $x = 0$)
D'après le théorème de la bijection continue, f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$ et la réciproque $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est automatiquement continue.

Définition

Cette réciproque est appelé racine cubique notée

$$\sqrt[3]{\bullet} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt[3]{x} \end{array}$$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt[3]{x^3} = x$ et $\left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = x$

Dérivabilité : On applique le théorème de la bijection dérivable uniquement sur les intervalles $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ car f ne s'y annule pas. Donc $\sqrt[3]{.}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
Cependant $f'(0) = 0$ donc $\sqrt[3]{\bullet}$ n'est pas dérivable en zéro (tangente verticale)

6. SAVOIR REFAIRE : expliquer en détails la construction de la fonction arcsin, l'obtention de sa dérivée et son graphe.

$\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est pas bijective.
Cependant, soit $\varphi : \begin{array}{ccc} \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] & \to & [-1; 1] \\ x & \mapsto & \sin(x) \end{array}$

J'affirme que φ est bijective.
En effet : si $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $\varphi'(x) = \cos(x) \geq 0$ car $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ et φ' s'annule deux fois $\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)$
φ est donc strictement croissante (donc injective) et $\operatorname{Im} f = [-1; 1]$ donc φ est surjective.

φ est strictement croissante et continue donc d'après le théorème de la bijection continue. $\varphi^{-1} = [-1; 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ est automatiquement continue.

Définition

φ^{-1} est appelé la fonction arcsinus noté $\varphi^{-1} = \arcsin$

Dérivabilité de φ^{-1} : si $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

$$\begin{aligned} \varphi'(x) = 0 \quad & \text{ssi} \quad \cos(x) = 0 \\ & \text{ssi} \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \end{aligned}$$

Donc arcsin admet des tangentes verticales en $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et $\varphi\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ i.e. en -1 et 1.
Elle est dérivable sur $[-1; 1]$ et si $x \in]-1; 1[$, $\left(\varphi^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{\varphi'\left[\varphi^{-1}(x)\right]} = \dfrac{1}{\cos[\arcsin(x)]}$
On veut simplifier cette expression, en utilisant $\forall x \in [-1; 1]$, $\sin(arcsin(x)) = x$
Si $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$
Donc $\cos^2(\theta) = 1 - \sin^2(\theta)$
Ainsi $\sqrt{\cos^2(\theta)} = \sqrt{1 - \sin^2(\theta)}$

Donc $|\cos(\theta)| = \sqrt{1-\sin^2(\theta)}$
Avec $\theta = \arcsin$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, on a $\cos(\theta) \geq 0$ donc $|\cos(\theta)| = \cos(\theta)$

Ainsi

$$\begin{array}{rcl} \left(\varphi^{-1}\right)'(x) & = & \dfrac{1}{\cos(\arcsin(x))} \\ & = & \dfrac{1}{|\cos(\arcsin(x))|} \\ & = & \dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))}} \\ & = & \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{array}$$

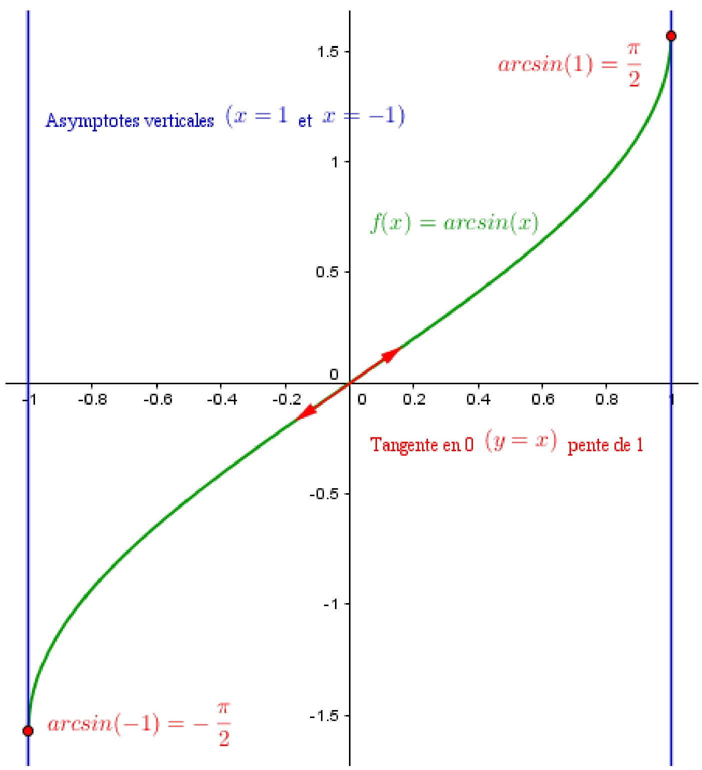
Théorème

$$\begin{array}{rccl} \arcsin : & [-1;1] & \to & \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \\ & x & \mapsto & \arcsin(x) \end{array}$$

et si $x \in]-1;1[$ alors

$$(\arcsin)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Graphe :



Valeurs élémentaires :

$$\arcsin(1) = \frac{\pi}{2} \qquad \arcsin(0) = 0 \qquad \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4} \text{ car } \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \text{ et } \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

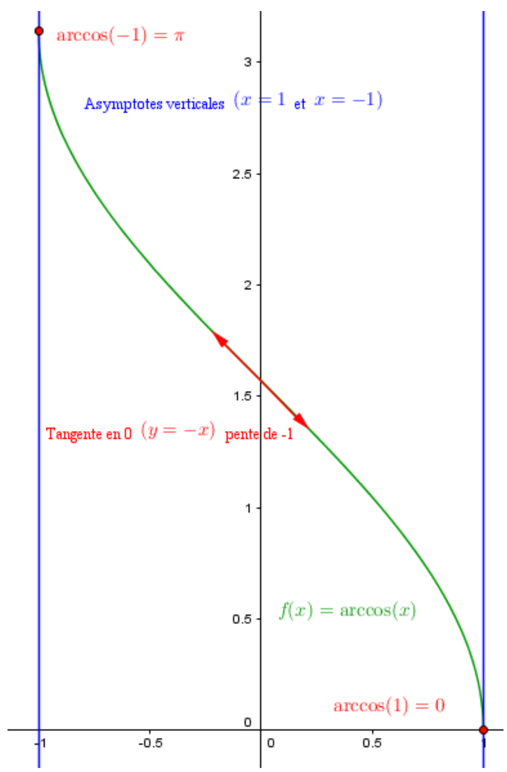
7. Fonctions circulaire réciproques : arcsin, arccos, arctan. En particulier, savoir les source et but de ces fonctions qui en font des bijections. Savoir aussi ensembles de dérivabilité et les dérivées, les graphes et les valeurs élémentaires.

Théorème (arccos)

$$\begin{array}{rccl} \arccos : & [-1;1] & \to & [0;\pi] \\ & x & \mapsto & \arccos(x) \end{array}$$

arccos est continue sur $[-1;1]$, dérivable sur $]-1;1[$ et $\forall x \in]-1;1[$, $\arccos'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Graphe :



Si $x \in [-1;1]$, $\arccos(x)$ est l'unique angle de $[0;\pi]$ dont le cosinus vaut x
$x \in [-1;1]$ et $y = \arccos(x) \Leftrightarrow y \in [0;\pi]$ et $\cos(y) = x$

Valeurs élémentaires :

$$\arccos(1) = 0 \qquad \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3} \qquad \arccos(-1) = \pi$$

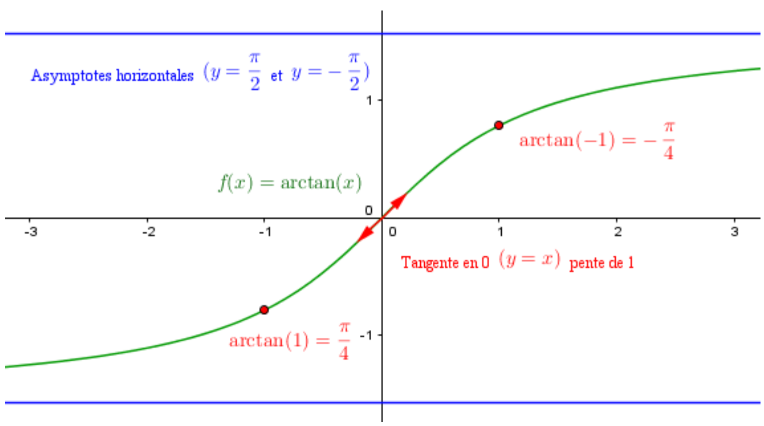
$$\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6} \qquad \arccos(0) = \frac{\pi}{2}$$

Théorème (arctan)

$$\begin{array}{rccl} \arctan : & \mathbb{R} & \to & \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\\ & x & \to & \arctan(x) \end{array}$$

arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, (\arctan)'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

Graphe :



Valeurs élémentaires :

$\arctan(0) = 0$ car $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ et $\tan(0) = 0$
$\arctan(1) = \dfrac{\pi}{4}$ car $\dfrac{\pi}{4} \in \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ et $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$
$\arctan(-1) = -\frac{pi}{4}$ car arctan est impaire
$\arctan(\sqrt{3}) = \dfrac{\pi}{3}$ car $\dfrac{\pi}{3} \in \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ et $\tan\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$

8. Formulaire général sur les dérivées et graphes de fonctions usuelles.

Fonctions	$\mathscr{D}_f$	Dérivées	$\mathscr{D}_{f'}$
$x^n (n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$x^\alpha (\alpha \in \mathbb{R}^*)$	$\mathbb{R}_+^*$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\frac{1}{x^n} (n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}^*$	$\frac{-n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x	$\mathbb{R}$
$\ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\tan(x)$	$\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\}$	$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\}$
$\arcsin(x)$	$[-1; 1]$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1; 1[$
$\arccos(x)$	$[-1; 1]$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1; 1[$
$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$
$sh(x)$	$\mathbb{R}$	$ch(x)$	$\mathbb{R}$
$ch(x)$	$\mathbb{R}$	$sh(x)$	$\mathbb{R}$
$th(x)$	$\mathbb{R}$	$1 - th^2(x) = \frac{1}{ch^2(x)}$	$\mathbb{R}$

9. SAVOIR REFAIRE : sur quel domaine l'affirmation "$\arcsin(\sin(x)) = x$" est-elle valable ? Et "$\sin(\arcsin(x)) = x$" ? Même chose pour cosinus et tangente.

— $\sin(\arcsin(x)) = x$ pour $x \in [-1; 1]$

— $\cos(\arccos(x)) = x$ pour $x \in [-1; 1]$

— $\tan(\arctan(x)) = x$ pour $x \in \mathbb{R}$

— $\arcsin(\sin(x)) = x$ pour $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

— $\arccos(\cos(x)) = x$ pour $x \in [0; \pi]$

— $\arctan, (\tan(x)) = x$ pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$