I) Auto-test : Nombres complexes (I)

1. Donner la définition d'un groupe. Quantifiez tous les axiomes.

Définition

On appelle groupe un couple $(G, \star)$ où G est un ensemble et $\star$ est une loi interne sur G.

i.e. $\star : \begin{array}{ccc} G \times G & \to & G \\ (x,y) & \mapsto & x \star y \end{array}$ qui vérifie :

1. $\star$ est associative i.e. $\forall (x,y,z) \in G^3, x \star (y \star z) = (x \star y) \star z$
2. $\star$ admet un élément neutre dans G i.e. $\exists e \in G, \forall x \in G, x \star e = e \star x = x$
3. Tout élément de G est symétrisable i.e. $\forall x \in G, \exists y \in G, x \star y = y \star x = e$

Définition

On dit que le groupe $(G, \star)$ est commutatif ou abélien lorsque : $\forall (x,y) \in G^2, x \star y = y \star x$

2. Donner 3 exemples usuels de groupes additifs et 3 exemples de groupes multiplicatifs.

Groupe additif : $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{Z}, +)$
Groupe multiplicatif : $(\mathbb{R}^*, \times)$, $(\mathbb{C}^*, \times)$, $(\mathbb{R}_+^*, \times)$, $(\mathbb{Q}^*, \times)$

3. SAVOIR REFAIRE : Qu'est ce que le groupe des permutations d'un ensemble ? Prouvez que c'est effectivement un groupe.

Définition

Soit E un ensemble.
On appelle permutation de E toute bijection de E dans lui-même.
L'ensemble des permutation de E dans lui même est noté $\sigma(E)$

Théorème

Si E est un ensemble non vide alors $(\sigma(E), \circ)$ est un groupe non commutatif en général.

Preuve :
Montrons que $(\sigma(E), \circ)$ est un groupe :

1. (I) Soient $f = E \to E$ et $g : E \to E$
Alors $f \circ g : E \to E$ est encore une fonction bijective.
Donc $f \circ g \in \sigma(E)$

2. (A) Cela vient de l'associativité des fonctions. Si f, g et h sont dans $\sigma(E)$, alors $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$

3. (N) Élément neutre : c'est Id_E
En effet si $f \in \sigma(E)$, alors $f \circ \mathrm{Id}_E = \mathrm{Id}_E \circ f = f$

4. (S) Soit $f \in \sigma(E)$, f étant bijective on peut envisager sa réciproque. On a $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$. Donc f est symétrisable.

Conclusion : $(\sigma(E); \circ)$ est un groupe.

4. Donner la définition d'un sous-groupe.

Définition

Soit $(G, \star)$ un groupe.
Soit $G \subset G$ un sous ensemble.
On dit que H est un sous-groupe de G lorsque
1. $1_G \in H$, H contient le neutre de G
2. H est stable par $\star$ i.e. $\forall (x, y) \in H^2, x \star y \in H$
3. H est stable par passage au symétrique i.e. $\forall x \in H, x^{-1} \in H$

Théorème

Si H est un sous-groupe de $(G, \star)$
Alors $(H, \star)$ est lui même un groupe.

5. À l'aide de la conjugaison complexe : donner les parties réelle et imaginaire et le module d'un nombre complexe z. Caractériser le fait que z est réel/imaginaire pur.

$z \in \mathbb{C}$ ssi $z = ai + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$
$a = \Re(z)$ partie réel et $b = \Im(z)$ partie imaginaire.
$z \in \mathbb{C}$ est imaginaire pur lorsque $\Re(z) = 0$ i.e. $z = iy$ où $y \in \mathbb{R}$
$z \in \mathbb{C}$ est un réel pur lorsque $\Im(z) = 0$ donc $z \in \mathbb{R}$.
Le module de z est $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (correspond à la distance Oz)

6. Qu'est ce qu'un morphisme de groupe ?

Définition

Soient $(G, \star)$ et $(K, \bullet)$ des groupes, $f = G \to K$ une fonction.
On dit que f est une morphisme de groupe de $(G, \star)$ dans $(K, \bullet)$ lorsque $\forall (x, y) \in G^2, f(x \star y) = f(x) \bullet f(y)$

7. Si z_1 et z_2 sont dans $\mathbb{C}$, alors $|z_1 + z_2|^2 = \ldots$?

Lemme (du carré du module)

$\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ alors $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + Z\Re(z_1 + \overline{z}_2)$

8. SAVOIR REFAIRE : Énoncer et prouver l'inégalité triangulaire et son cas d'égalité.

Théorème (Inégalité triangulaire et son cas d'égalité)

Soient z et z' dans $\mathbb{C}$
Alors $|z+z'| \leq |z|+|z'|$ avec égalité ssi $\exists \lambda \in \mathbb{R}_+, z=\lambda z'$ ou $z'=\lambda z$ ssi z et z' sont sur une même demi-droite issue de l'origine

Preuve :
Cas de l'inégalité :

Soient z et z' dans $\mathbb{C}$

$$\begin{array}{rcl} |z+z'|^2 & = & |z|^2+|z'|^2+Z\Re(zz') \\ (|z|+|z'|)^2 & = & |z|^2+|z'|^2+2|z||z'| \\ & = & |z|^2+|z'|^2+2|z\overline{z'}| \qquad \text{car } |z'|=|\overline{z'}| \end{array}$$

Or $\forall \omega \in \mathbb{C}, |\Re(\omega)| \leq |\omega|$ et $|\Im(\omega)| \leq |\omega|$

On applique ceci avec $\omega = zz'$

$$|z+z'|^2 = |z|^2+|z'|^2+2\Re(z\overline{z'}) \leq |z|^2+|z'|^2+2|z\overline{z'}| = (|z|+|z'|)^2$$

Donc $\sqrt{|z+z'|^2} \leq \sqrt{(|z|+|z'|)^2}$ car $\sqrt{.}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$
Donc $|z+z'| \leq |z|+|z'|$

Cas d'égalité :

On procède par double implication
Supposons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tq $z=\lambda z'$ (idem pour $z'=\lambda z$)

$$\begin{array}{rcl} |z+z'| & = & |\lambda z'+z'| \\ & = & |z'||1+\lambda| \\ & = & |z'|(1+\lambda) \qquad \text{car } 1+\lambda \geq 0 \end{array}$$

Par ailleurs

$$\begin{array}{rcl} |z|+|z'| & = & |\lambda z'|+|z'| \\ & = & |\lambda||z'|+|z'| \\ & = & (1+\lambda)|z'| \qquad \text{car } \lambda \geq 0 \end{array}$$

Donc $|z+z'| = |z|+|z'|$

Réciproquement, supposons que $|z+z'| = |z|+|z'|$.
Donc $|z+z'|^2 = (|z|+|z'|)^2$
D'après le lemme

$$\begin{array}{rcl} |z|^2+|z'|^2+2\Re(z\overline{z'}) & = & |z|^2+|z'|^2+Z|z\overline{z'}| \\ \Re(z\overline{z'}) & = & |z\overline{z'}| \end{array}$$

On pose $\omega = z\overline{z'}$, si $\omega = x+iy$ avec $(x,y) \in \mathbb{R}^2$
alors $\Re(\omega) = |\omega| \Rightarrow x = \sqrt{x^2+y^2}$
$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x \geq 0 \\ x^2 = x^2+y^2 \end{array} \right.$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y^2 = 0 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \omega \in \mathbb{R}_+$
D'où $\mu \in \mathbb{R}_+$ tq $z\overline{z'} = \mu$

$$z\overline{z'}z' = \mu z' = |z'|^2$$

Si $|z'|^2 \neq 0$ alors $z = \dfrac{\mu}{|z'|^2} \times z'$
d'où $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tq $z = \lambda z'$
Si $|z'|^2 = 0$, alors $z' = 0$, on pose alors $\lambda = 0$, $z' = \lambda z$ $(0 = 0)$
D'où le résultat.

9. Si z_1 et z_2 sont dans $\mathbb{C}$ énoncer une minoration classique de $|z_1 + z_2|$.

Corollaire (minoration de $|z + z'|$)

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, ||z| - |z'|| \leq |z + z'|$$

10. Donner la définition de $e^{i\theta}$ pour $\theta \in \mathbb{R}$, ainsi que ses propriétés essentielles. À quelle condition a-t-on $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$ pour θ et θ' dans $\mathbb{R}$?

Définition

Soit $\theta \in \mathbb{R}$
On pose $e^{i\theta} = \cos(\theta) + \sin(\theta)$
ainsi $\Re(e^{i\theta)=\cos(\theta)}$ et $\Im(e^{i\theta}) = \sin(\theta)$

Formule d'Euler :

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Théorème

$$\text{Soit } \varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ \theta & \mapsto & e^{i\theta} \end{array}$$

1. φ est 2π périodique et si θ et θ' sont réels alors, $e^{i\theta} = e^{i\theta'} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = \theta' + 2\pi k$
2. $\forall (\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2, e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} \times e^{i\theta'}$
3. $\forall \theta \in \mathbb{R}, \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \dfrac{1}{e^{i\theta}}$
4. φ est paramétrable de $\mathbb{S}^1$
- $\forall \theta \in \mathbb{R}, |e^{i\theta} = 1|$ (i.e. $\operatorname{Im} f \subset \mathbb{S}^1$)
- Par ailleurs tout $z \in \mathbb{S}^1$ peut s'écrire $z = e^{i\theta}$ pour un certain $\theta \in \mathbb{R}$.

Plus précisément : $\forall z \in \mathbb{S}^1, \exists! \theta_0 \in]-\pi, \pi], e^{i\theta_0} = z$
5. Si $\theta \in \mathbb{R}, e^{i\theta} = 1 \Leftrightarrow \theta = 2\pi k$ où $k \in \mathbb{Z}$

11. Donner la définition de l'ensemble noté $\mathbb{S}^1$. Comment caractériser ses éléments à l'aide de l'exponentielle complexe ? Et à l'aide de la conjugaison ?

Définition

On appelle $\mathbb{S}^1$ l'ensemble des complexes de module 1

$$\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C}/|z| = 1\}$$

On l'appelle le cercle unité
Une autre notation est $\mathbb{U}$

12. SAVOIR REFAIRE : Montrer que $\mathbb{S}^1$ est un sous groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$

Montrons que $\mathbb{S}^1$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$
1. Le neutre de $(\mathbb{C}^*, \times)$ i.e. A est bien dans $\mathbb{S}^1$ car $|1| = 1$
2. Montrons que $\mathbb{S}^1$ est stable par $\times$
Soient z et z' dans $\mathbb{S}^1$ i.e. $|z| = 1$ et $|z'| = 1$
Montrons que $z \times z' \in \mathbb{S}^1$
Or $|z|timesz' = |z| \times |z'| = 1 \times 1 = 1$
donc $zz' \in \mathbb{S}^1$
3. Montrons que $\mathbb{S}^1$ est stable par passage au symétrique (ici c'est l'inverse)
Soit $z \in \mathbb{S}^1$, $\left|\frac{1}{|z|}\right| = \frac{1}{|z|} = \frac{1}{1} = 1$
Conclusion : $\mathbb{S}^1$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$

13. Donner la définition de l'exponentielle complexe $\exp : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}^*$. Indiquer ses principales propriétés.

Définition (exponentielle complexe)

Soit $z = x + iy$ (où x et y sont réels)

On définit alors $e^z = e^x \times e^{iy}$ D'où une fonction $\exp_{\mathbb{C}} : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & e^z \end{array}$

Théorème

1. $\exp_{\mathbb{C}}$ est un prolongement de $\exp_{\mathbb{R}}$ à $\mathbb{C}$
2. $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, e^{z+z'} = e^z \times e^{z'}$
3. $\forall z \in \mathbb{C}$, $|e^z| = e^{\Re(z)}$ et $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$
4. $\mathrm{Im}(\exp_{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}^*$

14. SAVOIR REFAIRE : Montrer que l'image de l'exponentielle complexe $\exp_{\mathbb{C}}$ est $\mathbb{C}^{*2}$.

Montrons que $\mathrm{Im}(\exp_{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}^*$
On procède par double implication.
Montrons que $\mathrm{Im}(\exp_{\mathbb{C}}) \subset \mathbb{C}^*$
Soit $z \in \mathbb{C}$, Montrons que $e^z \in \mathbb{C}^*$, Montrons que $z^z \neq 0$
Or $|e^z| = e^{\Re(z)} > 0$
Donc $|e^z| \neq 0$, donc $e^z \neq 0$
d'où la première inclusion.

Montrons que $\mathbb{C}^* \subset \operatorname{Im}(\exp_{\mathbb{C}})$
Soit $\omega \in \mathbb{C}^*$
On cherche $z \in \mathbb{C}$ tq $\omega = e^z$
J'affirme que $\dfrac{\omega}{|\omega|} \in \mathbb{S}^1$
En effet $\left|\dfrac{\omega}{|\omega|}\right| = \dfrac{|\omega|}{|\omega|} = 1$
d'où d'après le cercle unité, un certain $\omega \in \mathbb{R}$ tq $\dfrac{\omega}{|\omega|} = e^{i\theta}$
Donc $\omega = |\omega|e^{i\theta}$
or $|\omega| \in \mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_+^* = \exp(\mathbb{R})$
d'où un certain $x \in \mathbb{R}$ tq $|\omega| = e^x$
Ainsi $\omega = e^x \times e^{i\theta}$
On pose $z = x + i\theta$
Ainsi $\omega = e^z$ donc $\omega \in \operatorname{Im}(\exp_{\mathbb{C}})$

15. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Qu'est ce qu'un argument de z ? Que dire de deux arguments de z ? Qu'est ce que l'argument principal de z ? Donner les propriétés de l'argument.

Définition (Argument de z)

Soit $z \in \mathbb{C}^*$ on appelle argument de e tout nombre réel θ tq $\dfrac{z}{|z|} = e^{i\theta}$

Deux argument de e sont égaux modulo $[2\pi]$, $\arg(z)$ est l'ensemble des arguments de z

$$\arg(z) = \{\theta \in \mathbb{R} / \frac{z}{|z|} = e^{i\theta}\}$$

Définition

Soit $z \in \mathbb{C}^*$, on appelle argument principal de z l'unique argument de e qui est dans $]-\pi;\pi]$

On le note $\operatorname{Arg}(z)$

Théorème

Soient z et z' dans $\mathbb{C}^*$ (non nul)
1. $Arg(zz') = \operatorname{Arg}(z) + \operatorname{Arg}(z')[2\pi]$
2. $\operatorname{Arg}\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \operatorname{Arg}(z) - \operatorname{Arg}(z')[2\pi]$
3. $\operatorname{Arg}\left(\frac{1}{z}\right) = -\operatorname{Arg}(z)[2\pi]$
4. $\operatorname{Arg}(\overline{z}) = -\operatorname{Arg}(z)[2\pi]$
5. $\operatorname{Arg}(-z) = \arg(z) + \pi[2\pi]$
6. $\forall n \in \mathbb{N}, \operatorname{Arg}(z^n) = n \operatorname{Arg}(z)[2\pi]$

16. Qu'est ce qu'une écriture polaire d'un nombre complexe ?

Définition

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On appelle écriture polaire/trigonométrique de z toute écriture de la forme

$$z = re^{i\theta} \qquad \text{où } r > 0 \text{ et } \theta \in \mathbb{R}$$

Théorème

Dans ce cas on a forcement $r = |z|$ et $\theta = \text{Arg}(z)[2\pi]$

17. Donner la définition de l'ensemble notée $\mathcal{R}_n$ des racines n-ièmes de l'unité $(n \in \mathbb{N}^*)$. Décrire cet ensemble, donner son cardinal et préciser ses propriétés géométriques.

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$
On dit que $z \in \mathbb{C}$ est racine $n^{\text{ième}}$ (complexe) de l'unité lorsque $z^n = 1$. Leur ensemble est noté R_n

$$\mathrm{R}_n = \{z \in \mathbb{C} / z^n = 1\}$$

Théorème

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$
Alors :
1.

$$\begin{aligned} \mathrm{R}_n &= \{\omega^k / k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{\omega^k / k \in [\![0; n-1]\!]\} \\ &= \{e^{\frac{i\pi}{n}k} / k \in [\![0; n-1]\!]\} \end{aligned}$$

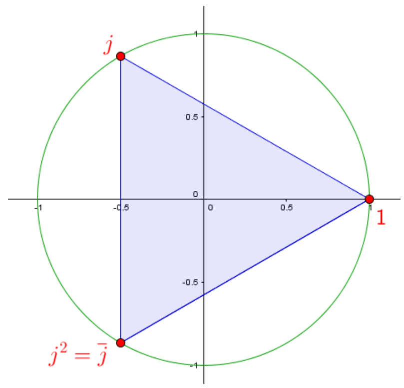
2. R_n est fini de cardinal n i.e. l'équation $z^n = 1$ admet exactement n solutions dans $\mathbb{C}$.
3. Aspect géométrique : Les éléments de R_n sont les sommets d'un polynôme régulier à n cotés inscrit dans $\mathbb{S}^1$

18. Tout sur j.

$$j = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad j^2 = \overline{j} \qquad j^3 = 1$$

$$1 + j + j^2 = 0$$

$R_3 = \{z \in \mathbb{C}/z^3 = 1\}$ alors $R_3 = \{1, j, j^2\}$



19. SAVOIR REFAIRE : pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\sum_{\alpha \in \mathcal{R}_n} \alpha^p$ en fonction de $p \in \mathbb{Z}$.

On décrit R_n.
Soit $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$
$R_n = \{\omega^k / k \in [\![0; n-1]\!]\}$
On note $S_n = \sum_{\alpha \in R_n} \alpha^p$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\omega^k\right)^p = \sum_{k=0}^{n-1} (\omega^p)^k$$

1^{er} cas : Si $\omega^p = 1$, alors $S_n = 0$

$2^{\text{ème}}$ cas : Si $\omega^p \neq 1$, alors $S_n = \dfrac{1 - \omega^{pn}}{1 - \omega^p}$
Or $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$, donc $\omega^{pn} = (\omega^n)^p = \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^p = 1$

$$\begin{aligned}
\omega^p = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad e^{i\frac{2\pi p}{n}} = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{2\pi p}{n} \equiv 0[2\pi] \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{2\pi p}{n} = 2\pi k \qquad \text{où } k \in \mathbb{Z} \\
&\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z}, p = kn \\
&\Leftrightarrow \quad p \text{ est un multiple de n} \\
&\Leftrightarrow \quad n | p
\end{aligned}$$

Conclusion : Si $n \nmid p$ alors $S_n = 0$ et si $n|p$ alors $S_n = 0$

20. Déterminer pour $n \in \mathbb{N}^*$ les racines n-ièmes d'un nombre complexe donné sous forme polaire. Expliquer comment on se ramène aux racines complexes de l'unité. Savoir résoudre le cas particulier des racines carrées complexes en cherchant les solutions sous la forme $z = x + iy$.

Racines n-ièmes de $a = fe^{i\theta}$ ($f > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$)

$$R_n(a) = \{z \in \mathbb{C}/z^n = a\}$$

- Solution particulière $= z_0 = f^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta}{n}}$

- Solution générale : $R_n(a) = \{z_0.\omega^k / k \in [\![0, n-1]\!]\}$ où $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$.
  "On fait tourner z_0 autour de l'origine en multipliant par les racines n-ièmes de l'unité" $R_n(a)$ forme encore les sommets d'un polygone régulier à n cotés, mais de rayon $f^{\frac{1}{n}}$ et partant de z_0 et non pas de l'origine.

Racines carrés complexes $\Delta a + ib$

— On cherche des solutions entières $z = x + iy$ et $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$

— Sinon on cherche z sous la forme

$$z = x + iy \quad : \quad \begin{aligned} & z^2 = a + ib \\ & x^2 - y2 = a \\ & 2xy = b \end{aligned}$$

Ruse : ajouter l'équation $|z|^2 = |a + ib|$ qui donne $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$

21. Équation du second degré dans $\mathbb{C}$. Pour a, b, c dans $\mathbb{C}$, $a \neq 0$, exprimer les solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$. Donner les relation coefficients/racines.

Équation du second degré dans $\mathbb{C}$

$$az^2 + bz + c = 0 \qquad \text{avec } a, b, c \text{ dans } \mathbb{C} \text{ et } a \neq 0$$

Discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac$

Théorème

Si $\delta \in \mathbb{C}$ est une racine complexe de Δ (i.e. $\delta^2 = \Delta$)
Alors
1. (E) admet deux solutions :

$$z_1 = \frac{-b + \delta}{2a} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{-b - \delta}{2a}$$

2. $z_1 = z_2$ ssi $\Delta = 0$

3. Relation coef/racines :

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \qquad z_1 z_2 = \frac{c}{a}$$

4. Factorisation : $\forall z \in \mathbb{C}, az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$