I) Auto-test : Nombres complexes (II)

1. Donner les formules de Moivre et Euler.

Théorème (Formule de Moivre)

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$
$$(\cos(x) + i\sin(x))^n = \cos(nx) + i\sin(nx)$$

Théorème (Formules de Euler)

Soit $x \in \mathbb{R}$
$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

2. SAVOIR REFAIRE : linéariser $\sin^3(x)$, puis $\cos^3(x).\sin^3(x)$ avec $x \in \mathbb{R}$

Linéariser $\sin^(x)$

$$\begin{aligned}
\sin^3(x) &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^3 \\
&= \frac{1}{(2i)^3}(e^{ix} - e^{-ix}) \\
&= \frac{1}{(2i)^3}[e^{i3x} - 3e^{i2x}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-ix} - e^{-i3x}] \\
&= \frac{1}{(2i)^3}[e^{i3x} - e^{-i3x} - 3(eix - e^{-ix})] \\
&= \frac{1}{(2i)^2}[\sin(3x) - 3\sin(x)]
\end{aligned}$$

Donc $\sin^3(x) = \frac{1}{(2i)^2}[3\sin(x) - \sin(3x)]$

Linéariser $\cos^3(x) \times \sin^3(x)$

$$\begin{aligned}
\cos^3(x) \times \sin^3(x) &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^3 \times \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^3 \\
&= \frac{1}{2^3}[e^{i3x} + 3e^{i2x}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-i2x} + e^{-i3x}] \times \frac{1}{(2i)^3}[e^{i3x} - 3e^{i2x}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-ix} - e^{-i3x}] \\
&= \frac{1}{2^3}[e^{i3x} + e^{-i3x} + 3(e^{ix} + e^{-ix})] \times \frac{1}{(2i)^3}[e^{i3x} - e^{-i3x} - 3(eix - e^{-ix})] \\
&= \frac{1}{2^2}[\cos(3x) + 3\cos(x)] \times \frac{1}{(4)}[3\sin(x) - \sin(3x)] \\
&= \frac{1}{16}[\cos(3x) + 3\cos(x)][3\sin(x) - \sin(3x)]
\end{aligned}$$

3. SAVOIR REFAIRE : montrer que $\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin[(2n+1)\frac{x}{2}]}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} + 1\right)$

On utilise $\cos(\theta) = \Re(e^{i\theta})$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \Re(e^{ikx}) = \underbrace{\Re\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}\right)}_{\hat{S}_n} \qquad \text{car } \Re(z+z') = \Re(z) + \Re(z')$$

On calcule $\hat{S}_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (e^{ix})^k$

1er cas : $e^{ix} = 1$, alors $\hat{S}_n = n+1$ donc $S_n = \Re(n+1) = n+1$ i.e. $x \in 2\pi\mathbb{Z}$

2ème cas : si $e^{ix} \neq 1$ i.e. $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$ alors $\hat{S}_n = \dfrac{1 - e^{ix(n+1)}}{1 - e^{ix}}$

On utilise la demi somme en facteur

$$\begin{aligned}
\hat{S}_n &= \frac{\dfrac{e^{i\frac{x(n+1)}{2}}\left[e^{-i\frac{x(n+1)}{2}} - e^{i\frac{x(n+1)}{2}}\right]}{2i}}{\dfrac{e^{i\frac{x}{2}}\left[e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}\right]}{2i}} \\
&= \frac{e^{i\frac{x(n+1)}{2}}}{e^{i\frac{x}{2}}} \times \frac{-\sin\left(\frac{x(n+1)}{2}\right)}{-\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \\
&= \frac{\sin\left(\frac{x(n+1)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \times e^{i\frac{xn}{2}}
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
S_n &= \Re(\hat{S}_n) \\
&= \Re\left(\frac{\sin\left(\frac{x(n+1)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \times e^{i\frac{xn}{2}}\right) \\
&= \frac{\sin\left(\frac{x(n+1)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \times \Re\left(e^{i\frac{xn}{2}}\right) \\
&= \frac{\sin\left(\frac{x(n+1)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \times \cos\left(\frac{xn}{2}\right) \qquad \text{car } \Re(e^{i\theta}) = \cos(\theta)
\end{aligned}$$

$$\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$$

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{1}{2}\frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\left[\sin\left(\frac{x}{2}(2n+1)\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sin\left(\frac{x}{2}(2n+1)\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\left((2n+1)\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} + 1\right)
\end{aligned}$$

4. SAVOIR REFAIRE : pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}$, exprimer $\cos(nx)$ comme un polynômes en $\cos(x)$. Définir alors le n-ième polynôme de Tchebychev.

Soient $n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\cos(nx) &= \Re(e^{inx}) \\ &= \Re\left[(e^{ix})^n\right] \\ &= \Re\left[(\cos(x) + i\sin(x))^n\right] \\ &= \Re\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (i\sin(x))^k (\cos(x))^{n-k}\right)\end{aligned}$$

Or si $k \in \mathbb{N}$, $i^k \in \mathbb{R}$ ssi k est pair i.e. $k = 2p$ où $p \in \mathbb{R}$
Ainsi

$$\cos(nx) = \sum_{a \leq 2p \leq n} \binom{n}{2p} i^{2p} (\sin(x))^{2p} (\cos(x))^{n-2p}$$

Donc $\cos(nx) = \sum_{a \leq 2p \leq n} \binom{n}{2p} (-1)^p (1 - \cos^2(x))^p (\cos(x))^{n-2p}$

On pose $T_n(X) = \sum_{a \leq 2p \leq n} \binom{n}{2p} (X^2 - 1)^p X^{n-2p}$ appelé $n^{\text{ième}}$ pôlynome de Tchebychev.
Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}, \cos(nx) = T_n(\cos(x))$

5. Définir l'affixe d'un point ou d'un vecteur du plan en repère orthonormé.

Définition

On appelle affixe du point $M(x, y)$ le complexe $z = x + iy$.
On appelle affixe du vecteur $\overrightarrow{u}(x, y)$ le complexe $z = x + iy$

6. Si A et B sont les points du plan d'affixe z_A et z_B, exprimer en fonction de ces nombres complexes l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$, celle du milieu de $[AB]$, la distance AB.

Théorème

Si A d'affixe $z_A \in \mathbb{C}$ et B d'affixe $z_B \in \mathbb{C}$, alors
1. $\overrightarrow{AB}$ est d'affixe $z_B - z_A$
2. $AB = |z_B - z_A|$
3. L'affixe du milieu de $[AB]$ est $\dfrac{z_A + z_B}{2}$

7.Angles, alignement, parallélisme et orthogonalité : soient A, B, C, D des points du plan d'affixes respectives z_A, z_B, z_C, z_D dans $\mathbb{C}$. Exprimer modulo 2π la mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD})$. En déduire la caractérisation algébrique des 3 situations suivantes où l'on suppose A, B, C, D deux à deux distincts :
- **A, B, C alignés ;**
- **$(AB) \perp (CD)$;**
- **$(AB) // (CD)$**

Théorème

Soient A, B, C, D des points d'affixes respectives z_A, z_B, z_C, z_D dans $\mathbb{C}$
Alors $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \text{Arg}\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) [2\pi]$

Corollaire

Alignement de 3 points :

$$\begin{aligned} A, B, C \text{ alignés} \quad & \text{ssi} \quad (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv 0[\pi] \\ & \text{ssi} \quad \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv 0[\pi] \\ & \text{ssi} \quad \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Orthogonalité :

$$\begin{aligned} (AB) \perp (CD) \quad & \text{ssi} \quad (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \equiv \frac{\pi}{z}[\pi] \\ & \text{ssi} \quad \text{Arg}\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{z}[\pi] \\ & \text{ssi} \quad \tfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R} \end{aligned}$$

Parallélisme :

$$\begin{aligned} (AB)//(CD) \quad & \text{ssi} \quad (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \equiv 0[\pi] \\ & \text{ssi} \quad \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \equiv 0[\pi] \\ & \text{ssi} \quad \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

8. SAVOIR REFAIRE : trouver l'ensemble des z dans $\mathbb{C}$ tels que les points d'affixes 1, z et z^3 soient alignés.

1^{er} cas : Cas des ponts confondus
$A = B \Leftrightarrow z = 1$
$A = C \Leftrightarrow z^3 = 1 \Leftrightarrow z \in R_3 = \{i, j, \overline{j}\}$
$B = C \Leftrightarrow z = z^3 \Leftrightarrow z(1 - z^2) = 0 \Leftrightarrow z \in \{0; 1; -1\}$

2^{nd} cas : Cas des points deux à deux distincts

$$\begin{array}{rcl}
A, B, C \text{ alignés} & \Leftrightarrow & (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv 0[\pi] \\
& \Leftrightarrow & \arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv 0[\pi] \\
& \Leftrightarrow & \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R} \\
& \Leftrightarrow & \dfrac{z^3 - 1}{z - 1} \in \mathbb{R} \\
\dfrac{1 - z^3}{1 - z} \in \mathbb{R} & \Leftrightarrow & 1 + z + z^3 \in \mathbb{R} \qquad \text{suite géométrique} \\
& \Leftrightarrow & z + z^2 \in \mathbb{R} \\
& \Leftrightarrow & z + z^2 = \overline{z + z^2} \\
& \Leftrightarrow & z + z^2 = \overline{z} + \overline{z^2} \\
& \Leftrightarrow & z - \overline{z} + z^2 - \overline{z^2} = 0 \\
& \Leftrightarrow & (z - \overline{z})(1 + z + \overline{z}) = 0 \\
& \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rl} & z = \overline{z} \\ \text{ou} & 1 + 2\Re(z) = 0 \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rl} & z \in \mathbb{R} \\ \text{ou} & \Re(z) = -\frac{1}{2} \end{array} \right.
\end{array}$$

9. Pour $a \in \mathbb{C}$, indiquer la transformation algébrique correspondant à la translation du plan de vecteur d'affixe a.

Théorème

La translation de vecteur a est l'application

$$\begin{array}{rcl} t_a : \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z + a \end{array}$$

10. Pour $\omega \in \mathbb{C}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, quelle est la transformation algébrique correspondant à la rotation du plan de centre d'affixe ω et d'angle θ dnas le sens trigonométrique ?

Théorème

L'homothétie de centre ω de rapport λ est l'application

$$\begin{array}{rcl} h(\omega, \lambda) : \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \lambda(z - \omega) + \omega \end{array}$$

11. Même question pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et l'homothétie de centre d'affixe ω et de rapport λ.

Théorème

La rotation de centre ω, d'angle θ est l'application

$$\begin{array}{rccl} r(\omega,\theta): & \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ & z & \mapsto & e^{i\theta}(z-\omega)+\omega \end{array}$$

12. Donner la définition algébrique d'une similitude directe dans le plan complexe.

Définition

Soient $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$, une application de la forme

$$\begin{array}{rccl} s: & \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ & z & \mapsto & az+b \end{array}$$

est appelé similitude directe du plan complexe.

13. SAVOIR REFAIRE : montrer qu'une similitude directe conserve les angles orientés et les rapports de longueur.

Soient $\begin{array}{rccl} s: & \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ & z & \mapsto & az+b \end{array}$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$

A_1, A_2, A_3, A_4 quatre points du plan d'affixes respectives z_1, z_2, z_3, z_4 et deux à deux distincts. On note A'_1, A'_2, A'_3, A'_4, leur image "par s" d'affixes respectives z'_1, z'_2, z'_3, z'_4

Rapports de longueur :

$$\begin{aligned} \frac{A'_1A'_2}{A'_3A'_4} &= \left|\frac{z'_2-z'_1}{z'_4-z'_3}\right| \\ &= \left|\frac{az_2+b-(az_1+b)}{az_4+b-(az_3+b)}\right| \\ &= \frac{|a||z_2-z_1|}{|a||z_4-z_1|} \\ &= \frac{A_1A_2}{A_3A_4} \end{aligned}$$

Donc s conserve les rapports de longueurs.

Angles orientés :

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{A'_1A'_2, A'_3A'_4}) &\equiv \operatorname{Arg}\left(\frac{z'_4-z'_3}{z'_2-z'_1}\right)[2\pi] \\ &\equiv \operatorname{Arg}\left(\frac{az_4+b-(az_3+b)}{az_2+b-(az_1+b)}\right)[2\pi] \\ &\equiv \operatorname{Arg}\left(\frac{Z_4-z_3}{z_2-z_1}\right)[2\pi] \end{aligned}$$

Donc $(\overrightarrow{A'_1A'_2, A'_3A'_4}) \equiv (\overrightarrow{A_1A_2, A_3A_4})[2\pi]$.
Donc s conserve les angles orientés.

14. Pour a, b dans $\mathbb{C}$, $a \neq 0$, soit $s : z \mapsto az + b$ (de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$). Décomposer la similitude directe s en composée de transformations élémentaires (translations, rotation, homothéties), dont on exprimera les éléments caractéristiques en fonction de a et b.

Théorème

Soient $s : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & az+b \end{array}$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$

1. Si $a = 1$, alors s est une translation.
2. Si $a \neq 1$, alors s admet un unique point fixe ω i.e. $\exists! \omega \in \mathbb{C}, s(\omega) = \omega$ et si $a = fe^{i\theta}$ $(f > 0, \theta \in \mathbb{R})$ alors

$$s : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & fe^{i\theta}(z-\omega)+\omega \end{array}$$

et $s = h \circ r = r \circ h$ où h est l'homothétie de centre ω et de rapport $|a| = f$ et r est la rotation de centre ω et d'angle $\theta \equiv \mathrm{Arg}(a)[2\pi]$