I) Auto-test : Calcul de primitives et d'intégrales

1. Donner une primitive de $f : t \mapsto e^{-t}\sin(t)$

Une primitive de f est $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x e^{-t}\sin(t)dt$ (théorème fondamental de l'analyse)

$\sin(t) = \mathrm{Im}(e^{it})$

$$\begin{aligned}
\text{Si } x \in \mathbb{R},\ F(x) &= \int_0^x e^{-t}\,\mathrm{Im}(e^{it})dt \\
&= \int_0^x \mathrm{Im}(e^{-t}e^{it})dt \\
&= \mathrm{Im}\left(\int_0^x e^{t(-1+i)}dt\right) \\
&= \mathrm{Im}\left(\left[\frac{1}{-1+i}e^{t(-1+i)}\right]_0^x\right) \\
&= \mathrm{Im}\left(\frac{1}{i-1}(e^{x(i-1)}-1)\right) \\
&= \mathrm{Im}\left(\frac{-1}{2}(i+1)(e^{-x}(\cos(x)+i\sin(x)))\right) \\
&= \frac{-1}{2}\left[e^{-x}\cos(x) - 1 + e^{-x}\sin(x)\right] \\
&= \frac{e^{-x}}{2}(\cos(x)+\sin(x)) + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

2. Primitive des fonctions suivantes en reconnaissant un motif :

$x \mapsto \frac{4}{3x+1}, x \mapsto \frac{3x}{x^2+1}, x \mapsto \frac{5x}{\sqrt{4-2x^2}}, x \mapsto \frac{5}{\sqrt{4-2x^2}}, x \mapsto \frac{2}{x^{\frac{4}{3}}}, x \mapsto \frac{\sin(\ln(x))}{x}, x \mapsto \frac{3x^2+1}{(x^3+x-2)^4}, x \mapsto \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}, x \mapsto \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}, x \mapsto x\cos(4-x^2), x \mapsto (\sin(x))\cos^2(x), x \mapsto \frac{\ln(\tan(x))}{\cos^2(x)}, x \mapsto \frac{1}{\tan(x)}, x \mapsto \frac{1}{1-3x^2}$

$f(x)$	Motif	Primitive de f
$\frac{4}{3x+1}$	$\frac{u'}{u}$	$\frac{4}{3}\ln\left\lvert x+\frac{1}{3}\right\rvert$
$\frac{3x}{x^2+1}$	$\frac{u'}{u}$	$\frac{3}{2}\ln\lvert x^2+1\rvert$
$\frac{5x}{\sqrt{4-2x^2}}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$-\frac{5}{2}\sqrt{4-2x^2}$
$\frac{5}{\sqrt{4-2x^2}}$	$\frac{u'}{1-u^2}$	$\frac{5\sqrt{2}}{2}\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$
$\frac{2}{x^{\frac{4}{3}}}$	$u'u^n$	$\frac{-6}{x^{\frac{1}{3}}}$
$\frac{\sin(\ln(x))}{x}$	$u'\sin(u)$	$-\cos(\ln(x))$
$\frac{3x^2+1}{(x^3+x-2)^4}$	$-\frac{u'}{u^n}$	$\frac{-1}{3(x^3+x-2)^3}$
$\frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}$	$\frac{u'}{1+u2}$	$-\arctan(\cos(x))$
$\frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$	$u'u$	$\frac{(\arcsin(x))^2}{2}$
$x\cos(4-x^2)$	$u'\cos(u)$	$\frac{\sin(4-x^2)}{-2}$
$(\sin(x))\cos^2(x)$	$u'u^n$	$\frac{\cos^3(x)}{-3}$
$\frac{\ln(\tan(x))}{\cos^2(x)}$	$u'\ln(u)$	$\tan(x-\ln(\tan(x))-\tan(x)$
$\frac{1}{\tan(x)}$	$\frac{u'}{u}$	$\ln(\lvert\sin(x)\rvert)$
$\frac{1}{1-3x^2}$	$\frac{u'}{1-u^2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{1}{2}\ln\left(\left\lvert\frac{1+x}{1-x}\right\rvert\right)$

3. Énoncer le "théorème fondamental de l'analyse" qui donne la relation entre primitives et intégrales.

Théorème (fondamental de l'analyse)

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ continue et $a \in I$
Alors :

1. $F : \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_a^x f(t)dt \end{array}$ est une primitive de f sur I.

Plus précisément c'est la primitive de f qui s'annule en a i.e. F est dérivable sur $F' = f$ et $F(a) = 0$

2. Pour toute primitive F de f sur I, on a

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) = [F(t)]_a^b$$

4. Déterminer une primitive de arctan **sur** $\mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$ une primitive de arctan et F tq

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_a^x \arctan(t)dt \\ &= \int_a^x \underbrace{\arctan(t)}_{u(t)} \times \underbrace{1}_{v'(t)} dt \end{aligned}$$

Ainsi $u'(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$ et $v(t) = t$

Par intégration par parties

$$\begin{aligned} F(x) &= [\arctan(t) \times t]_0^x - \int_0^x \frac{t}{1+t^2} \times \frac{2}{2} dt \\ &= x\arctan(x) - 0 \times \arctan(0) - \frac{1}{2}[\ln(|1+t^2|)]_0^x \\ &= x\arctan(x) - \frac{1}{2}[\ln(1+x^2) - \ln(1)] \\ &= x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) \end{aligned}$$

5. Calculer : $\displaystyle\int_0^\pi \cos(t)dt$.

Par intégration par parties

$$\begin{aligned} I &= [t\sin(t)]_0^\pi - \int_0^\pi sin(t)dt \\ &= 0 - 0 - [-\cos(t)]_0^\pi \\ &= -(-\cos(\pi) + \cos(0)) \\ &= -2 \end{aligned}$$

6. Calculer : $\displaystyle\int_0^1 t^3 e^{t^3} dt$.

$$\begin{aligned} J &= \int_0^1 t^2 \times te^{t^2} dt \\ &= \left[\frac{t^2}{2} \times e^{t^2}\right]_0^1 - \int_0^1 2t \times \frac{1}{2}e^{t^2} dt \qquad \text{par intégration par parties} \\ &= \frac{e}{2} - 0 - \left[\frac{1}{2}e^{t^2}\right]_0^1 \\ &= \frac{e}{2} - \frac{e}{2} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

7. Calculer : $\displaystyle\int_1^3 \frac{\sqrt{t}}{t+1}$.

Changement de variable. On pose $x = \sqrt{t}$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{1}{2\sqrt{t}} \\ dx &= \frac{dt}{2\sqrt{t}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I &= \int_1^3 \frac{\sqrt{t}}{1+t} \times 2\sqrt{t}\frac{dt}{2\sqrt{t}} \\
&= \int_{\sqrt{1}}^{\sqrt{3}} \frac{2x^2}{x^2+1}dx \\
&= 2\int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{x^2+1}dx \\
&= 2\int_1^{\sqrt{3}} \frac{(x^2+1)-1}{x^2+1}dx \\
&= 2\int_1^{\sqrt{3}} 1-\frac{1}{x^2+1}dx \\
\text{Donc } I &= 2[x - arctan(x)]_1^{\sqrt{3}} \\
&= 2[\sqrt{3} - arctan(\sqrt{3}) - (1 - arctan(1))] \\
&= 2\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3} - 1 + \frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

8. Calculer : $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx$

Pour "casser la racine" on pose $x = \sin(t)$ ou plutôt $y = arcsin(x)$ (car x varie de -1 à 1)

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \cos(t) \\
dx &= \cos(t)dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Donc } I &= \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2(t)}\cos(t)dt \\
&= \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\cos(t)|\cos(t)dt
\end{aligned}$$

or $\cos \geq 0$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

$$\text{Donc } I = \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)dt$$

On linéarise :

$$\begin{aligned}
I &= \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2t)}{2}dt \\
&= \frac{1}{2}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1+\cos(2t)dt \\
&= \frac{1}{2}\left[t + \frac{\sin(2t)}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + 0 - \left(\frac{-\pi}{2} + 0\right)\right) \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$