I) Auto-test : Équations différentielle linéaires d'ordre 1 et 2.

1. Donner la forme générale d'une équation différentielle linéaire. Définir les coefficients et le second membre. Que signifie que cette équation est homogène.

Définition

Forme générale d'une équation différentiel linéaire (EDL) :

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$$

Si $k \in \mathbb{N}$, $y^{(k)}$ désigne la dérivée $k-$ième de y.
Les a_k ($k \in [\![0, n]\!]$) sont des fonctions définies sur un même intervalle qui sont appelés les coefficients de l'équation.
b est une fonctions appelé le second membre de l'équation.
Lorsque b est nulle on dit que l'équation différentiel linéaire est homogène.

2. Donner la structure des solutions dans le cas homogène et dans le cas général.

Théorème (Structures des solutions de E_H et E)

1. Si y_1 et y_2 sont des solutions de l'équation homogène (E_H), sur l'intervalle I, alors pour toutes constantes λ_1 et λ_2 réelles, la fonctions $\lambda_1 y - 1 + \lambda_2 y_2$ est aussi solutions de (E_H)

2. Si $U : I \to \mathbb{R}$ est solution particulière de (E) sur I, alors l'ensemble de solutions de (E) sur I est :

$$\mathscr{S}_1(E) = \{U + y_H / y_H \text{ est solutions de } (E_H) \text{ sur } I\}$$

3. Qu'est ce qu'une équation différentielle d'ordre 1 résolue en y' ?

Définition

On dit que (E) est résolue en y' sur l'intervalle I lorsque $t \mapsto a(t)$ ne s'annule pas sur I i.e. $\forall t \in I, a(t) \neq 0$

Si c'est le cas, alors sur I

$$(E) \Leftrightarrow y' + \frac{b(t)}{a(t)}y = \frac{c(t)}{a(t)}$$

i.e. on peut alors se ramener au cas où $a(t) = 1$

4. SAVOIR REFAIRE : donner et prouver la forme générale des solutions de l'équation différentielle $y' = a(x)y$ où $a : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur l'intervalle I.

Théorème

Soient I un intervallle de $\mathbb{R}$, a et f des fonctions continues sur I, Q une primitive de a sur I.
Alors les solutions de $y' = a(x)y$ (E_H) sur I sont les $y_H = x \mapsto \lambda e^{Q(x)}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\mathscr{S}_1(E_H) = \{x \mapsto \lambda e^{Q(x)} / \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Preuve :
On procède par double inclusion :
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit $y_H : x \mapsto \lambda e^{Q(x)}$
Montrons que y_H est solutions de (E_H).
Soit $x \in I$

$$\begin{aligned} y'_H &= \lambda Q'(x) e^{Q(x)} \\ &= a(x) y_H(x) \end{aligned}$$

Donc y_H est bien solution de (E_H)

Réciproquement, montrons qu'il n'y a pas d'autre solution de (E_H).
Soit $\varphi : I \to \mathbb{R}$ une solution de (E_H), j'envisage $g : x \mapsto e^{-Q(x)}\varphi(x)$
g est dérivable sur I et si $x \in I$, alors

$$\begin{aligned} g'(x) &= -Q'(x)e^{-Q(x)}\varphi(x) + e^{-Q(x)}\varphi'(x) \\ &= e^{-Q(x)} \quad \underbrace{[\varphi'(x) - a(x)\varphi(x)]}_{=0 \text{ car } \varphi \text{ est solution de } (E_H)} \qquad \text{car } Q' = a \end{aligned}$$

Ainsi g' est nulle sur l'intervalle I.
Donc g est constant sur I
D'où une certaine constante $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in I, g(x) = \lambda \text{i.e. } \forall x \in I, \varphi(x) = \lambda e^{Q(x)}$$

5. Donner la forme générale des solutions de $y' = a(x)y + b(x)$ où $a = I \to \mathbb{R}$, $b : I \to \mathbb{R}$ est continue, lorsque l'on connait une solution particulière $U : I \to \mathbb{R}$

Théorème

Soient I un intervallle de $\mathbb{R}$, a et f des fonctions continues sur I, Q une primitive de a sur I.
Si U est une solution particulière de $y' - a(x)y = f(x)$ (E) alors

$$\mathscr{S}_I(E) = \{y_H + U / y_H \in \mathscr{S}_I(E_H)\}$$

6. SAVOIR REFAIRE : recollement basique, résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{R}_-^*$ puis sur $\mathbb{R}$ l'équation $t^3y' + y = 0$.

1. Sur $I = \mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$, $t^3 \neq 0$ donc (E) est résolue en y'

$$(E) \text{ est homogène } \Leftrightarrow y' = -t^{-3}y$$

Une primitive de $-t^3$ est $\dfrac{1}{2t^2}$
Donc $\mathscr{S}_{\mathbb{R}_+^*}(E) = \{t \mapsto \lambda e^{\frac{1}{2t^2}} / \lambda \in \mathbb{R}\}$

$\mathscr{S}_{\mathbb{R}_-^*}(E) = \{t \mapsto \mu e^{\frac{1}{2t^2}} / \mu \in \mathbb{R}\}$

2. Solutions sur $\mathbb{R}$
Analyse : Soit y une solution de (E) sur $\mathbb{R}$
En particulier y est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ d'où un certain $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t > 0, y(t) = \lambda e^{\frac{1}{2t^2}}$ d'après le 1.
En particulier y est solution sur $\mathbb{R}_-^*$ d'où un certain $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t < 0, y(t) = \mu e^{\frac{1}{2t^2}}$ d'après le 1.
y est dérivable sur $\mathbb{R}$
Donc y est dérivable en zéro.
Donc y est continue en zéro, donc $y(t) \xrightarrow[t \to 0]{} y(0)$
En particulier $y(t) \xrightarrow[t \to 0^+]{y} (0)$ donc $\lambda e^{\frac{1}{2t^2}} \xrightarrow[t \to 0^+]{} y(0)$
Or $e^{\frac{1}{2t^2}} \xrightarrow[t \to 0^+]{} +\infty$, donc si $\lambda \neq 0$, $\lambda e^{\frac{1}{2t^2}} \xrightarrow[t \to 0^+]{} +\infty$, donc $y(0) = +\infty$. Impossible !
Donc $\lambda = 0$.
De même $y(t) \xrightarrow[t \to 0^-]{} y(0)$
Or $e^{\frac{1}{2t^2}} \xrightarrow[t \to 0^-]{} +\infty$
Donc forcément $\mu = 0$
Ainsi y est nulle sur $\mathbb{R}^*$ et comme $y(t) \xrightarrow[t \to 0]{} y(0)$. On a même $y(0) = 0$.
Donc y est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

Synthèse : Réciproquement, la fonction nulle est bien solution de $t^3 y' + y = 0$ sur $\mathbb{R}$

Conclusion : C'est la seule solution sur $\mathbb{R}$

7. SAVOIR REFAIRE : recollment moins basique, résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{R}_-^*$ puis sur $\mathbb{R}$ l'équation $t^2 y' - y$

1. Sur $I = \mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$, $t^2 \neq 0$ donc (E) est résolue en y'

$$(E) \text{ est homogène } \Leftrightarrow y' = t^2 y$$

Donc $\mathscr{S}_{\mathbb{R}_+^*}(E) = \{t \mapsto \lambda e^{-\frac{1}{t}} / \lambda \in \mathbb{R}\}$
$\mathscr{S}_{\mathbb{R}_-^*}(E) = \{t \mapsto \mu e^{-\frac{1}{t}} / \mu \in \mathbb{R}\}$

2. Analyse :
Soit y une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
Par restriction y est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.
D'où un certain $\lambda \in \mathbb{R}$ et un certain $\mu \in \mathbb{R}$ tel que

$$y(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\frac{1}{t}} & \text{si} \quad t > 0 \\ \mu e^{-\frac{1}{t}} & \text{si} \quad t < 0 \end{cases}$$

y est continue en zéro :
Donc $y(t) \xrightarrow[t \to 0]{} y(0)$
En particulier $y(t) \xrightarrow[t \to 0^+]{} y(0)$
Donc $\lambda e^{-\frac{1}{t}} \xrightarrow[t \to 0^+]{} 0$
Or $e^{-\frac{1}{t}} \xrightarrow[t \to 0^+]{} 0$ Donc $y(0) = 0$
De même $y(t) \xrightarrow[t \to 0^-]{} y(0)$
Donc $\lambda e^{-\frac{1}{t}} \xrightarrow[t \to 0^-]{} 0$
Or $e^{-\frac{1}{t}} \xrightarrow[t \to 0^-]{} +\infty$ Donc $\mu = 0$
Ainsi

$$y(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\frac{1}{t}} & \text{si} \quad t > 0 \text{ où } \lambda \in \mathbb{R} \\ 0 & \text{si} \quad t \leq 0 \end{cases}$$

3. Synthèse :
On se donne $\lambda \in \mathbb{R}$ quelconque.
On définit y tel que

$$y(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\frac{1}{t}} & \text{si} \quad t > 0 \text{ où } \lambda \in \mathbb{R} \\ 0 & \text{si} \quad t \leq 0 \end{cases}$$

De façon claire, y est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et solution sur $\mathbb{R}^*$
Reste à déterminer pour quel $\lambda \in \mathbb{R}$, y est dérivable en zéro.

Soit $t > 0$, $\dfrac{y(t) - y(0)}{t - 0} = \dfrac{\lambda e^{-\frac{1}{t}}}{t}$
On pose $x = \frac{1}{t} \xrightarrow[t \to 0]{} +\infty$
$\dfrac{y(t) - y(0)}{t - 0} = \lambda x e^{-x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$
Donc $\dfrac{y(t) - y(0)}{t - 0} \xrightarrow[t \to 0^+]{} 0$
Soit $t < 0$, alors $\dfrac{y(t) - y(0)}{t - 0} = 0 \xrightarrow[t \to 0^-]{} 0$
Donc y est dérivable en zéro pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$

Conclusion : Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont exactement celle de la forme

$$y(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\frac{1}{t}} & \text{si} \quad t > 0 \text{ où } \lambda \in \mathbb{R} \\ 0 & \text{si} \quad t \leq 0 \end{cases}$$

8. Donner la forme générale des solutions à valeurs réelles de l'équation $ay'' + by' + c = 0$ où a, b, c sont constantes réelles ($a \neq 0$, en fonction de $\Delta = ...$ Puis indiquer comment résoudre l'équation avec second membre.

Théorème

Soient a, b, c réels avec $a \neq 0$.
On cherche les solutions à valeurs réelles de l'équation homogène :

$$ay'' + by' + c = 0$$

On introduit l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$ (E_C) et son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$
1^{er} cas : si $\Delta > 0$, alors (E_C) admet deux solutions réelles $r_1 \neq r_2$.
Les solutions de E_H sont alors

$$y : r \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} \qquad o(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

$2^{\text{ème}}$ cas : si $\Delta = 0$, alors (E_C) admet une racine double réelle r.
Les solutions de (E_H) sont alors

$$y : t \mapsto (\lambda t + \mu) e^{rt} \qquad o(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

$3^{\text{ème}}$ cas : Si $\Delta < 0$, alors (E_C) admet deux racines complexes conjuguées r et $\overline{r}$
On écrit $r = \alpha_0 + i\beta_0$ où $(\alpha_0, \beta_0) \in \mathbb{R}^2$
Les solutions de (E_H) sont alors

$$y : t \mapsto e^{\alpha_0 t}(\lambda \cos(\beta_0 t) + \mu \sin(\beta_0 t)) \qquad o(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

9. Indiquer, en fonction de m, la méthode pour trouver une solutions particulière de l'équation $ay'' + by' + c = P(x)e^{mx}$, où $m \in \mathbb{C}$ et P est une fonction polynôme réelle.

Théorème

Méthode pour trouver une solution particulière de l'équation suivante en fonction de m

$$ay'' + by' + cy = P(x)e^{mx}$$

où $m \in \mathbb{C}$ et P est une fonction polynôme réelle.
L'équation homogène aboutie à l'équation caractéristique

$$ar^2 + br + c = 0 \qquad (E_C)$$

1^er cas : si m n'est pas racine de l'équation caractéristique.
Alors on cherche une solution particulière U sous la forme $U : t \mapsto Q(t)e^{mt}$ où $d^\circ Q = d^\circ P$

2^ème cas : si m est racine simple de l'équation caractéristique.
Alors on cherche une solution particulière U sous la forme $U : t \mapsto tQ(t)e^{mt}$ où $d^\circ Q = d^\circ P$

3^ème cas : si m est racine double de l'équation caractéristique.
Alors on cherche une solution particulère U sous la forme $U : t \mapsto t^2Q(t)e^{mt}$ où $d^\circ Q = d^\circ P$

10. SAVOIR REFAIRE : passage par les complexes, résoudre $y'' - y = 3e^{2x}\cos(x)$.

On reconnaît une équation différentiel d'ordre 2 à coefficient constants.
Équation homogène : $y'' - y = 0$
On introduit l'équation caractéristique $r^2 - 1 = 0$
Deux solutions réelles $r = \pm 1$
D'où $y_H : t \mapsto \lambda e^t + \mu e^{-t}$ où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

Recherche d'une solution particulière :
Le second membre n'est pas sous la forme $P(t)e^{mt}$
Idée : $\cos(t) = \Re(e^{it})$
On envisage spontanément l'équation différentiel complexe : $z'' - z = ze2te^{it}$ i.e. $z'' - z = ze^{(2+i)t}$ $E_{\mathbb{C}}$
Ici le second membre est de la forme $P(t)e^{mt}$ où $m = 2 + i \in \mathbb{C}$ pas racine de l'équation différentiel et $P(t) = 2$ de degré 0
On cherche une solution particulière de $(E_{\mathbb{C}})$ sous la forme :
$W : t \mapsto Ae^{(2+i)t}$ où $A \in \mathbb{C}$
$W' : t \mapsto A(2+i)e^{(2+i)t}$
$W'' : t \mapsto A(2+i)^2e^{(2+i)t}$

$$\begin{aligned} W \text{ est solution de } (E_{\mathbb{C}}) \quad &\text{ssi} \quad \forall t \in \mathbb{R}, W''(t) - W(t) = 3e^{(2+i)t} \\ &\text{ssi} \quad \forall t \in \mathbb{R}, A(2+i)^2e^{(2+i)t} - Ae^{(2+i)t} = 3Ae^{(2+i)t} \\ &\text{ssi} \quad \forall t \in \mathbb{R}, A(2+i)^- A = 3 \\ &\text{ssi} \quad \forall t \in \mathbb{R}, A[4 - 1 + 4i - 1] = 3 \\ &\text{ssi} \quad A = \frac{3}{2+4i} \\ &\text{ssi} \quad A = \frac{3}{10}(1-2i) \end{aligned}$$

D'où la solution particulière de $(E_{\mathbb{C}})$:

$$W : t \mapsto \frac{3}{10}(1-2i)e^{(2+i)t}$$

Retour à l'équation différentiel : $y'' - y = 3e^{2t}\cos(t)$
D'après le cour, $(E_{\mathbb{C}})$ étant à coefficient réels, $\Re(\omega)$ est solution de $y'' - y = \Re(3e^{(2+i)t})$
i.e. $y'' - y = \Re(3e^{2t} + e^{it})$
i.e. $y'' - y = 3e^{2t}\Re(z^i t)$
i.e. $y'' - y = 3e^{2t}\cos(t)$

Ainsi $U = \Re(W)$ est solution particulière de (E)
Soit $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} W(t) &= \frac{3}{10}(1-2i)e^{2t}(\cos(t) + i\sin(t)) \\ &= \frac{3}{10}e^{2t}[\cos(t) + i\sin(t) - 2i\cos(t) + 2\sin(t)] \end{aligned}$$

D'où la solution particulière de (E) : $U : t \mapsto \dfrac{3}{10}(\cos(t) + 2\sin(t))$

Solution générale de (E) :

$$y : t \mapsto \lambda e^t + \mu e^{-t} + \frac{3}{10}e^{2t}(\cos(t) + 2\sin(t))$$

11. SAVOIR REFAIRE : principe de superposition, résoudre l'équation $y'' - 2y' + y = \mathrm{ch}(x)$

On reconnaît une équation différentiel d'ordre 2.
Équation homogène : $y'' - 2y' + y = 0 (E_H)$
On introduit l'équation caractéristique $r^2 - 2r + 1 = 0 (E_C)$ i.e. $(r-1)^2 = 0$ $(\Delta = 0)$
On a une racine double $r = 1$
Solutions de (E_H) : $y_H : t \mapsto (\lambda + \mu t)e^t$ où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

Solutions particulière :
Le second membre $f(t) = \dfrac{1}{2}e^t + \dfrac{1}{2}e^{-t}$ n'est pas sous la forme $P(t)e^{mt}$

On envisage spontanément deux équation différentiel :

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{2}(E_1) \qquad \text{et} \qquad y'' - 2y' + y = \frac{e^{-t}}{2}(E_2)$$

On cherche une solution particulière U_1 de (E_1) ici $P(t)e^{mt} = \frac{e^t}{2}$ où $m = 1$ racine double de l'équation caractéristique et $P(t) = \frac{1}{2}$ de degré zéro.
On cherche U_1 sous la forme :
$U_1 : t \mapsto At^2e^t$ où $A \in \mathbb{R}$
$U_1' : t \mapsto Ae^t(2t + t^2)$
$U_1 : t \mapsto Ae^t(t^+42t + 2)$

$$\begin{aligned} U_1 \text{ est solution de } (E_1) \quad &\text{ssi} \quad \forall t \in \mathbb{R}, U_1''(t) - 2U_1'(t) + U_1(t) = \frac{e^t}{2} \\ &\text{ssi} \quad \forall t \in \mathbb{R}, Ae^t(t^+42t + 2) - 2Ae^t(2t + t^2) + At^2e^t = \frac{e^t}{2} \\ &\text{ssi} \quad \forall t \in \mathbb{R}, 4At + 2A - 4At = \frac{1}{2} \\ &\text{ssi} \quad A = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

D'où la solution particulière de (E_1) :

$$U_1 : t \mapsto \frac{t^2}{4}e^t$$

Puis on cherche une solution particulière U_2 de (E_2) ici $P(t)e^{mt} = \frac{e^{-t}}{2}$ où $m = -1$ qui n'est pas racine de l'équation caractéristique et $P(t) = \frac{1}{2}$ de degré zéro.

On trouve : $U_2 : t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{8}$

On somme $U_1'' - 2U_1' + U_1 = \dfrac{e^t}{2}$ et $U_2'' - 2U_2' + U_2 = \dfrac{e^{-t}}{2}$

$$\begin{aligned} U_1'' + U_2'' - 2(U_1' + U_2') + U_1 + U_2 &= \frac{e^t + e^{-t}}{2} \\ (U_1 + U_2)'' - 2(U_1 + U_2)' + (U_1 + U_2) &= \mathrm{ch}(t) \end{aligned}$$

Ainsi $U_1 + U_2$ est une solution particulière de (E) par principe de superposition.

Solution générale de (E) :

$$y : t \mapsto (\lambda + \mu t)e^t + t^2 \frac{e^t}{4} + \frac{e^{-t}}{8}$$