I) Auto-test : $\mathbb{N}$, ensembles finis et dénombrements.

1. Citer les 3 axiomes de $\mathbb{N}$.

On postule l'existence d'un ensemble non vide, noté $\mathbb{N}$ ensemble des entiers naturels dont les propriétés fondamentales sont :

1. Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément.

2. Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ possède un plus grand élément.

3. $\mathbb{N}$ n'est pas majoré.

2. Que dire d'une partie infinie de $\mathbb{N}$?

Une partie infinie de $\mathbb{N}$ est en bijection avec $\mathbb{N}$

3. Comment montrer que des ensembles finis sont égaux via les cardinaux ?

Théorème

Soient A et B des ensembles finis.
Alors $|A| = |B|$ ssi $A \sim B$ i.e. il existe une bijection de A dans B.
Inclusion : E désigne un ensemble fini.

— Si $A \subset E$, alors A est fini et $|A| \leq |E|$

— En particulier :

$$\left.\begin{array}{c} A \subset E \\ |A| = |E| \end{array}\right\} \Rightarrow A = E$$

4. Cardinal de l'union (inégalité). Cas d'une union disjointe. Égalité dans le cas de deux ensembles.

Théorème (Propriétés)

1. Une partie A d'un ensemble fini E est finie et $\text{card}(A) \leq \text{card}(E)$ avec égalité ssi $A = E$
2. Une réunion finie d'ensembles finis est un ensemble fini et

$$\text{card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \text{card}(A_i)$$

avec égalité ssi les A_i sont deux à deux distincts.

On écrit $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i$

5. Définition d'une partition d'un ensemble, d'une union disjointe.

Définition (Partition d'un ensemble)

Si $E = \bigsqcup_{i \in I} A_i$, alors les $(A_i)_{i \in I}$ forment une partition de E.

Définition (Partition d'une union disjointe)

Si E et F sont des ensembles et $f : E \to F$ est une application quelconque, alors

$$E = \bigsqcup_{y \in F} f^{-1}(\{y\})$$

6. Cardinal du produit cartésien.

Théorème (Propriété)

Un produit fini d'ensemble finis est fini et

$$\operatorname{card}\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \operatorname{card}(A_i)$$

7. Quel est l'effet d'une application sur les cardinaux finis ? À quelle condition a-t-on égalité des cardinaux de la source et de l'image ?

Théorème

Soient E un ensemble fini, F un ensemble quelconque et $f \in \mathscr{F}(E, F)$
Alors $f(E)$ est fini et $\operatorname{card}(f(E)) \leq \operatorname{card}(E)$ avec égalité ssi f est inj.

8. Que dire sur les cardinaux si $f : E \to F$ est une surjection ? injection ?

Corollaire

1. Si $E \hookrightarrow F$ et si F est fini alors E est fini et $|E| \leq |F|$
2. Si $E \twoheadrightarrow F$ et si E est fini alors F est fini et $|F| \leq |E|$

9. SAVOIR REFAIRE : montrer que si E et F ont le même cardinal, et si $f : E \to F$, alors f est bijective ssi elle est injective ssi elle est surjective.

Théorème

Soient E et F des ensembles finis de même cardial.
On se donne $f = E \to F$ quelconque.
Alors f est injective (1) $\Leftrightarrow$ f est surjective (2).

Preuve :
(1) $\Rightarrow$ (2) : on suppose que f est injective. Montrons que f est surjective.
$f|_E^{f(E)}$ est bijective (par construction à l'image).
Donc $|f(E)| = |E|$
Or par hypothèse $|E| = |F|$
Ainsi $f(E) \subset F$ et $|f(E)| = |F|$
Donc $f(E) = F$
Donc f est surjective.

(2) $\Rightarrow$ (1) : réciproquement, supposons que f est surjective. Montrons que f est injective.
On a $f(E) = F$
Or $|F| = |E|$
Donc $|f(E)| = |E|$
D'après le théorème, f est donc injective.

10. Pour E et F des ensembles finis, quel est le cardinal de $\mathscr{F}(E, F)$?

Théorème

Soient E et F des ensembles finis.
Alors $\mathscr{F}(E, F)$ est fini et

$$\text{card}(\mathscr{F}(E, F)) : (\text{card}(F))^{\text{card}(E)}$$

11. SAVOIR REFAIRE : prouver que si E est un ensemble fini, alors $\text{card}(\mathscr{P}(E)) = ...$

Théorème

Soit E un ensemble fini. Alors $\mathscr{P}(E)$ et fini, et

$$\text{card}(\mathscr{P}(E)) = 2^{\text{card}(E)}$$

Preuve :
On envisage $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \to & \mathscr{F}(E, \{0, 1\}) \\ A & \mapsto & \mathbb{1}_A \end{array}$
Il suffit de montrer que Φ est bijective.
En effet, d'après le théorème précédent, $\mathscr{F}(E, \{0, 1\})$ est fini de cardinal $2^{\text{card}(E)}$.

Montrons que Φ est injective :
Soient A et B dans $\mathscr{P}(E)$ tq $\Phi(A) = \Phi(B)$
Alors $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$, donc $A = B$ (cf. propriétés des fonctions indicatrices)
Donc Φ est injective.

Montrons que Φ est surjective.
Soit $f \in \mathscr{F}(E, \{0, 1\})$

On cherche une paire A de E tq $f = \mathbb{1}_A$
On pose $A = f^{-1}(\{1\})$ (préimage) i.e. $A = \{x \in E, f(x) = 1\}$
Par construction, f ne prenant que les valeurs 0 ou 1 :
Si $x \in A$, alors $f(x) = 1$
Si $x \notin A$, alors $f(x) = 0$
Donc $f = \mathbb{1}_A$
Alors $f = \Phi(A)$ (A est un antécédent de f par Φ)
Donc Φ est surjective.

Conclusion : Φ est bijective, d'où le résultat.

12. Définir la fonction indicatrice d'un ensemble. Donner ses propriétés.

Définition

Si $A \subset E$, alors on appelle fonction indicatrice de la partie A, la fonction

$$\begin{array}{rccl} \mathbb{1}_A : & E & \rightarrow & \{0;1\} \\ & x & \mapsto & \mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} A \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{cases} \end{array}$$

Théorème (Propriétés fondamentales)

Soient A et B des parties de E

— $\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$

— $\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$ et $\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A \cap B}$

— $A \subset B \Leftrightarrow \mathbb{1}_A \leq \mathbb{1}_B$ et $A = B \Leftrightarrow \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$

— Lien avec le cardinal : Si A est fini alors

$$|A| = \sum_{x \in E} \mathbb{1}_A(x)$$

13. Donner le cardinal des permutations d'un ensemble $\text{card}(\sigma(E)) = ...$

Théorème

Si E est fini alors $\sigma(E)$ aussi et

$$\text{card}(\sigma(E)) = |E|!$$

14. Qu'est ce qu'une p-liste d'un ensemble fini de E ? Qu'est ce que cela modélise ?

Définition

Soient E un ensemble non vide, $p \in \mathbb{N}^*$
On appelle p-liste de E ou p-uplet de E tout élément de E^p (produit cartésien)
Les p-listes sont des familles où l'ordre compte et les répétitions sont possibles. Elles modélisent des tirages successifs avec remise.

Théorème

Il existe $|E|^p$ p-listes de E

15. Qu'est ce qu'un p-arrangement d'un ensemble fini E ? Qu'est ce que cela modélise ?

Définition

On appelle p-arrangement de E tout p-lise d'éléments distincts de E
Les p-arrangements modélisent des tirages successifs sans remise.

16. Nombre de p-arrangement d'un ensemble à n éléments. Rapport avec les injections ?

Théorème

Soient E un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$
Alors,
1. Si $p \leq n$, il existe $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$ p-arrangements de E.
2. Si $p > n$, il n'en existe pas.

Corollaire

On suppose que $|E| = p$, $|F| = n$
1. Si $p \leq n$, il existe $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$ injection de E dans F.
2. Si $p > n$, il n'y en a pas.

Il existe le même nombre de p-arrangements que d'injections dans un ensemble.

17. Qu'est-ce qu'une p-combinaison d'un ensemble fini de E ? Qu'est ce que cela modélise ?

Définition

On appelle p-combinaison de E tout sous-ensemble à p élément de E.

Définition

Si $n \in \mathbb{N}$, on note $\binom{n}{p}$ le nombre de p-combinaison d'un ensemble à $n$éléments.

C'est le nombre de parties à p-éléments d'un ensemble à n-éléments.
$\binom{n}{p}$ est le nombre de façons de choisir p objets parmi n objets.
Modélisent des tirages simultanés.

18. Définir proprement, puis exprimer en termes de factorielles le nombre de p-combinaison d'un ensemble à n éléments. Donner une interprétation en termes de choix.

Théorème

Choisir p objets, c'est exactement choisir une partie à p-éléments d'un ensemble à n-éléments.

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

On choisir l'ordre dans lequel on les place.
Au total $\binom{n}{p} \times p!$ p-arrangement de E

19. Rappeler les propriétés usuelles des combinaisons.

Théorème (Propriétés des combinaisons)

1. $\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$
2. $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$
3. Binôme de Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{p} a^k b^{n-k}$$

4.

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \qquad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n \qquad \binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}$$