I) Auto-test : Ensembles ordonnées et réels.

1. Donner la définition d'une relation d'ordre. Qu'est ce qu'un ordre total ? partiel ? Donner un exemple d'ordre partiel.

Définition

Soit E un ensemble. On appelle relation d'ordre sur E une "relation binaire" R sur E vérifiant :
1. Réfléxivité : $\forall x \in E, xRx$ (lire "x en relation avec x")
2. Antisymétrie : $\forall (x,y) \in E^2, (xRy \text{ et } yRx) \Rightarrow (x = y)$
3. Transitivité : $\forall (x,y,z) \in E^3, (xRy \text{ et } yRz) \Rightarrow (xRy)$

On notera alors plutôt $\leq$ ou $\preceq$ au lieu de R.
On parlera de l'ensemble ordonné $(E, \preceq)$

Définition

Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné.
On dit que l'ordre $\leq$ est total lorsque les éléments de E sont tous 2 à 2 comparables. i.e. $\forall (x,y) \in E^2, (x \preceq y)$ ou $(y \preceq x)$.
Si ce n'est pas le cas, on dit que l'ordre est partiel.
On parle d'ensemble totalement ordonné ou partiellement ordonné.

— $(P(X), \subset)$ est partiellement ordonné (sauf si $X\varnothing$ ou si X est un singleton.

— $(\mathbb{N}^*, |)$ est partiellement ordonné.

2. Définir rigoureusement les termes majorant, minorant, maximum, minimum, borne supérieure, borne inférieure. Quantifiez ces définitions.

Définition

On appelle minorant de A tout élément u de E tel que $\forall a \in A, u \leq a$

Définition

On appelle majorant de A tout élément v de E tel que $\forall a \in A, a \leq v$

Définition

On appelle maximum de A tout élément $M \in E$ tel que
$$\begin{cases} 1.\ M \text{ est un majorant de } A \\ 2.\ M \in A \end{cases}$$
noté $\max(A)$

Définition

On appelle minimum de A tout élément $m \in E$ tq

$$\begin{cases} 1.\ m \text{ est un minorant de } A \\ 2.\ m \in A \end{cases}$$

noté $\min(A)$

Définition

On suppose que A est majorée et que l'ensemble des majorants de A admet un plus petit élément (minimum).
Alors celui ci est unique et est appelé borne supérieure de A, noté $\sup(A)$

Définition

On suppose que A est minorée et que l'ensemble des minorants de A admet un plus grand élément (maximum).
Alors celui-ci est unique et est appelé la borne inférieure de A, noté $\inf(A)$

Définition

- Si A admet un maximum, alors elle admet une bonne supérieure et $\sup(A) = \max(A)$
- Si A admet un minimum, alors elle admet une borne inférieure et $\inf(A) = \min(A)$

3. Donner la définition d'un anneau (unitaire). Qu'est ce qu'un élément inversible d'un tel anneau ? Donner un exemple d'anneau différent de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition

Soient A un ensemble, $+$ et $\times$ deux lois internes sur A. On dit que $(A, +, \times)$ est un anneau unitaire si
1. $(A, +)$ est un groupe abélien (i.e. commutatif) on note alors $0 = 0_A$ l'élément neutre pour la loi $+$.
2. $\times$
   - est associative : $\forall (a, b, c) \in A^3, a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$
   - admet un élément neutre, noté 1_A
   - est distributive par rapport à $+$ i.e. $\forall (a; b; c) \in A^3, a \times (b + c) = a \times b + a \times c, (b + c) \times a = b \times a + c \times a$
   - est une loi interne.

Si de plus la loi $\times$ est commutative (i.e. $\forall (a, b) \in A^2, a \times b = b \times a$) alors on parle d'anneau commutatif unitaire.

Définition

Si $(A, +, \times)$ est un anneau unitaire, un élément $a \in A$ est dit inversible s'il existe $b \in A$ tq $a \times b = b \times a = 1_A$

On note $\mathscr{I}(A)$ l'ensemble des éléments inversible de A

Exemple :
$(\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau commutatif unitaire.
Si on définit les lois $+$ et $\times$ par $(f+g) : x \mapsto f(x) + g(x)$ et $f \times g : x \mapsto f(x) \times g(x)$
L'élément neutre pour la loi $+$ est la fonction nulle et celui pour la loi $\times$ est l'application égale à 1

4. Donner la définition d'un corps. Donner un exemple d'anneau qui ne soit pas un corps.

Définition

Soient K un ensemble, $+$ et $\times$ deux lois internes sur K.
On dit que $(K, +, \times)$ est un corps si
1. $(K, +, \times)$ est un anneau unitaire
2. Tout élément différent de 0_K est inversible i.e. $\mathscr{I}(K) = K^* = K \backslash \{0_K\}$

Si la loi $\times$ est commutative, on parle alors de corps commutatif

- $(\mathbb{Z}, +, \times)$ n'est pas un corps car $\mathscr{I}(\mathbb{Z}) = \{+1; -1\} \neq \mathbb{Z}^*$

5. Citer l'axiome de la borne supérieure, et la propriété de la borne inférieure.

Définition (Axiome de la borne supérieure)

On dit qu'un ensemble ordonné $(E, \leq)$ vérifie l'axiome de la borne supérieure (ABS) lorsque :

Toute partie non vide et majorée de E admet une borne supérieure.

Théorème (Propriété de la borne inférieure)

Toutes partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

6. Énoncer la définition et les propriétés de la valeur absolue, puis prouver que si x et y sont réels, alors $||x| - |y|| \leq |x - y|$

Théorème

Soient x et y des réels.
Alors
1. $|x| = 0$ ssi $x = 0$
2. $|xy| = |x||y|$
3. $|x + y| \leq |x| + |y|$ avec égalité ssi x et y sont de même signe
4. $|x| - |y| \leq |x \pm y|$

Preuve :
Voir la preuve dans $\mathbb{C}$ (Chapitre 4)
Pour le cas d'égalité, x et y sont sur une même demi-droite issue de 0 ssi x et y sont dans $\mathbb{R}_+$ ou dans $\mathbb{R}_-$

7. Définition et propriétés de la fonction racine carrée.

Théorème

$\forall x \in \mathbb{R}_+, \exists! y \in \mathbb{R}_+, y^2 = x$
Cet unique réel > 0 est noté $y = \sqrt{x}$
Ainsi, si $x > 0$, alors $\sqrt{x}$ est le seul réel positif tq $\sqrt{x}^2 = x$

Théorème (Propriétés élémentaires)

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2} = |x|$
2. $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$, $\sqrt{xy} = \sqrt{x} \times \sqrt{y}$
3. Dans $\mathbb{R}$, les carrés sont exactement les éléments de $\mathbb{R}_+$

8. SAVOIR REFAIRE : montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Par l'absurde : supposons que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$
D'où $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tq $\left|\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}\right|$.
On peut toujours supposer que p et q sont premier entre eux (i.e. leur seul diviseur commun dans $\mathbb{N}$ est 1)
$(\sqrt{2})^2 = \left(\dfrac{p}{q}\right)^2$, donc $2 = \dfrac{p^2}{q^2}$ donc $2p^2 = q^2$

Lemme

Le carré d'un nombre pair est pair.
Le carré d'un nombre impair est impair.

$q^2 = 2p^2$ donc q est pair.
d'où un certain $k \in \mathbb{N}$ tq $q = 2k$
Ainsi $4k^2 = 2p^2$
Donc $2k^2 = p^2$
Ainsi p^2 est pair, donc p est pair.
Donc p et q sont pairs.
Contradiction avec le fait que p et q sont premiers entre eux.
Conclusion : $\sqrt{2}$ est irrationnel.

9. Définition et propriétés de la fonction partie entière

Définition (Fonction partie entière)

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists! n \in \mathbb{Z}, n \leq x < n+1$$

Cet unique n est appelé partie entière de x, noté $E(x)$ (ou parfois $[x]$)

Théorème (Propriétés)

— $\forall x \in \mathbb{R}, E(x) = \max\{n \in \mathbb{Z}/n \leq x\}$

— $x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow E(x) = x$

— $\begin{array}{rccc} E: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{Z} \\ & x & \mapsto & E(x) \end{array}$ est une fonction croissante constante sur tout $[p; p+1[$ où $p \in \mathbb{Z}$ (croissante mais pas strictement).

10. SAVOIR REFAIRE : énoncer puis prouver le fait que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Définition

Soit $A \subset \mathbb{R}$
On dit que A est une partie dense de $\mathbb{R}$ lorsque tout intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit a un singleton contient un élément de A i.e.

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, (a < b) \Rightarrow (\exists x \in A, a < x < b)$$

Théorème

$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

Preuve :
Soient $a < b$ dans $\mathbb{R}$
Il s'agit de trouver un rationnel dans l'intervalle $]a, b[$.
1. "on dilate l'intervalle $]a, b[$"

Lemme (Propriété d'Archimède)

$\forall x > 0$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $\exists n \in \mathbb{N}$, $nx \geq y$

J'affirme que $\exists N \in \mathbb{N}^*, Nb - Na > 1$
en effet il suffit d'appliquer la propriété d'Archimède avec "x" $\leftarrow \varepsilon = b - a > 0$ et "y" $\leftarrow 1$
d'où $N \in \mathbb{N}^*$ tq $N(b-a) > 1$

2. Montrons que $]Na, Nb[$ contient un entier.

On pose $m = E(Na) + 1$
Par définition de la partie entière

$$E(na) \leq Na < E(Na) + 1 = m$$

Donc $Na < m$
$m = E(Na) + 1 \leq Na + 1$ et $1 < Nb - Na$
Donc $m < Na + Nb - Na$ i.e. $m < Nb$
Donc $m \in]Na, Nb[$

3. $Na < m < Nb$
Donc $a < \underbrace{\frac{m}{N}}_{\text{rationnel}} < b$

11. SAVOIR REFAIRE : prouver que $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

Théorème

$\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

Preuve :
Soient $a < b$ dans $\mathbb{R}$
On pose $a' = a + \sqrt{2}$ et $b' = b + \sqrt{2}$
$a' < b'$ et $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$
D'où un certain rationnel $r \in \mathbb{Q}$ tq $a' < r < b'$
Ainsi $a + \sqrt{2} < r < b + \sqrt{2}$
Ainsi $a < r - \sqrt{2} < b$
Or $\sqrt{2}$ est irrationnel donc $r - \sqrt{2}$ est irrationnel.
D'où le résultat.

12. Quelle est la définition d'une partie convexe de $\mathbb{R}$? Quelles sont les parties convexes de $\mathbb{R}$?

Définition

Une partie $A \subset \mathbb{R}$ est dite convexe ssi $\forall (x, y) \in A^2, (x \leq y) \Rightarrow [x, y] \subset A$.
Les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont exactement les intervalles.

13. Définir la droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}}$

Définition

Rappel sur $\overline{\mathbb{R}}$: on ajoute à l'ensemble $\mathbb{R}$ deux éléments non réels $+\infty$ et $-\infty$ de sorte que l'on prolonge l'ordre de $\mathbb{R}$ à $\overline{\mathbb{R}}$ en exigeant

$$\forall x \in \mathbb{R}, -\infty < x < +\infty \qquad \text{et } \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

On obtient alors un ordre total sur $\overline{\mathbb{R}}$ tq $\max(\overline{\mathbb{R}}) = +\infty$ et $\min(\overline{\mathbb{R}}) = -\infty$
Toute partie de $\overline{\mathbb{R}}$ admet une borne supérieure, une borne inférieure.

14. SAVOIR REFAIRE : soit $A = \left\{x \in \mathbb{Q}/x^2 < 2\right\}$. Montrer que A n'admet pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$.

Soit $A = \{x \in \mathbb{Q}/x^2 < 2\}$.Montrons que A n'admet pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$.
Par l'absurde, soit $q = \sup(A) \in \mathbb{Q}$, $q \neq \sqrt{2}$ car $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

1^{er} cas : Si $q < \sqrt{2}$
$\mathbb{Q}$ étant dense dans $\mathbb{R}$, il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $q < r < \sqrt{2}$.
Alors $r^2 \leq 2$ donc $r \in A$ et $r > q$.
Cela contredit le fait que q est majorant de A.

2^{nd} cas : Si $q > \sqrt{2}$
$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
D'où $r' \in \mathbb{Q}$ tq $\sqrt{2} < r' < q$
Mais alors r' est un majorant rationnel de A (car $A = \mathbb{Q} \cap] - \sqrt{2}; \sqrt{2}[$) avec $r' < q$, ce qui contredit le fait que q est le plus petit des majorant de A.
Contradiction.

15. SAVOIR REFAIRE : énoncer et prouver la caractérisation epsilonesque de la borne supérieure dans $\mathbb{R}$.

Théorème (Caractérisation epsilonesque)

Soit $A \subset \mathbb{R}$ majorée et non vide (d'où l'existence de sa borne supérieure). Montrons que $\sup(A)$ est l'unique réel $\mu \in \mathbb{R}$ tq
1. μ est un majorant de A
2. $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, \mu - \varepsilon < a \leq \mu$

Preuve :
1. évident car la borne supérieure est toujours un majorant.
2. Soit $\varepsilon > 0$
$\mu - \varepsilon < \mu = \sup(A)$ qui est le plus petit des majorants de A.
Donc $\mu - \varepsilon$ n'est pas un majorant de A
d'où $a \in A$ tel que $\mu - \varepsilon < a$.
Par ailleurs $a \leq \sup(A)$ car le sup est un majorant.
D'où le résultat

Unicité : Soit $\mu' \in \mathbb{R}$ vérifiant 1. et 2.
Montrons que $\mu' = \mu$ $(\sup(A))$
D'après 1. μ' est un majorant de A
Donc $\mu \leq \mu'$ (car $\mu = \sup(A)$ est le plus petit des majorants de A)

Par l'absurde, si $\mu \neq \mu'$, alors $\mu < \mu'$.
On pose $\varepsilon = \mu' - \mu > 0$
Or μ' vérifie le 2. d'où un certain $a \in A$ tel que $\mu' - \varepsilon < a \leq \mu'$.
Ainsi $\mu < A$ avec $a \in A$.
Contradiction avec le fait que $\mu = \sup(A)$ est un majorant de A.
Donc $\mu' = \mu$ d'où l'unicité.

16. SAVOIR REFAIRE : définir la norme infinie d'une fonction bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Prouver l'inégalité triangulaire pour cette norme.

Définition

Soient E un ensemble non vide et $f \in \mathscr{F}(E, \mathbb{R})$ une fonction bornée.
On appelle norme infinie de f le réel positif

$$||f||_\infty = \sup\{|f(x)|/x \in E\}$$

Théorème

Soient f et g des fonctions bornées de E dans $\mathbb{R}$.
Alors $f + g$ est bornée et

$$||f + g||_\infty \leq ||f||_\infty + ||g||_\infty$$

Preuve :
Soit $x \in E$.
$|f(x)| \leq ||f||_\infty$ car $||f||_\infty$ est un majorant de $\{|f(x)|/x \in E\}$
De plus, $|g(x)| \leq ||g||_\infty$ car $||g||_\infty$ est un majorant de $\{|g(x)|/x \in E\}$ (Inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}$)
$|(f + g)(x)| = |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq ||f||_\infty + ||g||_\infty$

Ainsi $\forall x \in E, |(f + g)(x)| \leq ||f||_\infty + ||g||_\infty$
Donc $f + g$ est majorée et $||f||_\infty + ||g||_\infty$ est un majorant de $A = \{|(f + g)(x)|/x \in E\}$
Or $||f + g||_\infty \leq ||f||_\infty + ||g||_\infty$
Donc $||f + g||_\infty \leq ||f||_\infty + ||g||_\infty$