I) Autot-test : suites réelles et complexes 1

1. Donner la définition de la convergence d'une suite vers une limite réelle ou complexe.

Définition

(u_n) une suite réelle ou complexe
Soit $\ell \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
On dit que (u_n) converge vers ℓ lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

2. SAVOIR REFAIRE : prouver l'unicité de la limite

Soient $\left|\begin{array}{l}(u_n) \text{ une suite réelle ou complexe} \\ \ell \text{ et } \ell' \text{ dans } \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}\end{array}\right.$

Par l'absurde, supposons que $\ell \neq \ell'$
On pose $\varepsilon = \frac{1}{2}|\ell - \ell'|$
On a $\ell \neq \ell'$, donc $\varepsilon > 0$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ d'où un certain $N_1 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N_1, |u_n - \ell| < \varepsilon$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell'$ d'où un certain $N_2 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N_2, |u_n - \ell'| < \varepsilon$
Soit $N = \max\{N_1; N_2\}$
Si $n \geq N$, alors $|u_n - \ell| < \varepsilon$ et $|u_n - \ell'| < \varepsilon$
$|\ell - \ell'| = |\ell - u_n + u_n - \ell'| \leq |\ell - u_n| + |u_n - \ell'|$
Donc $|\ell - \ell'| \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$
or $2\varepsilon = |\ell - \ell'|$, donc $|\ell - \ell'| < |\ell - \ell'|$ contradiction d'où l'unicité.

3. Quantifier le fait qu'une suite diverge.

$$\forall \ell \in \mathbb{C}, \exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, |u_n - \ell| > \varepsilon$$

4. SAVOIR REFAIRE : Montrer qu'une suite convergente est bornée

Soit $\ell \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ tq $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ On pose $\varepsilon = 1 > 0$
D'où un certain $N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq 1$
Si $n \geq N, |u_n| = |u_n - \ell + \ell|$
Donc $|u_n| \leq |u_n - \ell| + |\ell||$ (par inégalité triangulaire)
Si $n \geq N, |u_n| \leq 1 + |\ell|$
On pose $M = \max\{|u_0|; |u_1|; ...; |u_{N+1}|; |\ell| + 1\}$
Par construction $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$
Donc (u_n) est bornée.

5. SAVOIR REFAIRE : Montrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = v$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n = u \times v$

Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} |u_n v_n - uv| &= |(u_n - u + u)v_n - uv| \\ &= |(u_n - u)v_n + u(v_n - v)| \leq |u_n - u||v_n| + |u||v_n - v| \end{aligned}$$

or (v_n) est convergente donc bornée.
D'où un certain$M \geq 0$ tq $\forall n \in \mathbb{N}, |v_n| \leq M$
$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n v_n - uv| \leq |u_n - u|M + |v_n - v||u|$

Soit $\varepsilon > 0$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u$ on pose $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{2M} > 0$
D'où $N_1 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N_1, |u_n - u| \leq \varepsilon'$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = v$ on pose $\varepsilon'' = \dfrac{\varepsilon}{2|u|} > 0$
D'où $N_2 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N_2, |v_n - v| \leq \varepsilon''$

On pose $N = \max\{N_1; N_2\}$
Si $n \geq N$ selon $|u_n v_n - uv| \leq |u_n - u|M + |v_n - v||u|$
$|u_n v_n - uv| \leq \dfrac{\varepsilon}{2M} \times M + \dfrac{\varepsilon}{2|u|} \times |u| = \varepsilon$

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = u \times v$

6. SAVOIR REFAIRE : Montrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u$, avec $u \neq 0$, alors, pour n grand, $u_n \neq 0$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{u}$

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} |u_n| &= |(u_n - u) + u| \\ &\geq |u| - |u_n - u| \end{aligned}$$

On pose $\varepsilon = \dfrac{|u|}{2} > 0$

D'où un entier $N_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N_0, |u_n - u| \leq \varepsilon = \dfrac{|u|}{2}$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi :}\quad & \forall n \geq N_0, |u_n| \geq |u| - \frac{|u|}{2} \\ & \forall n \geq N_0, |u_n| \geq \frac{|u|}{2} \end{aligned}$$

Montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{u}$
Soit $n \geq N_0$

$$\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u}\right| = \left|\frac{u - u_n}{u_n u}\right|$$

D'après $\forall n \geq N_0, |u_n| \geq \dfrac{|u|}{2}$, $\left|\dfrac{1}{u_n} - \dfrac{1}{u}\right| \leq \dfrac{2}{|u|^2} \times |u_n - u|$

Soit $\varepsilon > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u$, on pose $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{\frac{2}{|u|^2}}$
Doù un certain $N_1 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N_1, |u_n - u| \leq \varepsilon'$
On pose $N = \max\{N_0; N_1\}$
Ainsi $\forall n \geq N, \left|\dfrac{1}{u_n} - \dfrac{1}{u}\right| \leq \dfrac{2}{|u|^2}\varepsilon' = \varepsilon$

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{u}$

7. Quantifier le fait que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, puis que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

On dit qu'une suite réelle (u_n) tend vers $+\infty$ lorsque

$$\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \geq A$$

On dit qu'une suite réelle (u_n) tend vers $-\infty$ lorsque

$$\forall B > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \leq B$$

8. Qu'est ce qu'une suite divergente de $1^{\text{ère}}$ espèce ? $2^{\text{ème}}$ espèce.

Définition

Soit (u_n) une suite réelle
1. On dit que (u_n) est divergente de $1^{\text{ère}}$ espèce lorsque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \pm\infty$
2. On dit que (u_n) est divergente de $2^{\text{ème}}$ espèce lorsqu'elle est divergente mais pas de $1^{\text{ère}}$ espèce.

9. Donner deux exemples de suite divergente de $2^{\text{ème}}$ espèce.

Exemple 1 : $((-1)^n)$ est divergente de $2^{\text{ème}}$ car elle diverge mais ne tend pas vers $\pm\infty$
Exemple 2 : $(u_n) = \cos(n)$

10. Vrai-Faux : “une suite divergente de $2^{\text{ème}}$ espèce est forcément bornée" ?

Faux : $(u_n) = (-2)^n$
(u_n) n'est pas bornée, elle ne converge pas car toute suite convergente est bornée
(u_n) n'est pas de $1^{\text{ère}}$ espèce car elle ne tend pas vers $+\infty$ car si n est impair alors $u_n < 0$, elle ne tend pas non plus vers $-\infty$ car si n est pair alors $u_n > 0$.

11. SAVOIR REFAIRE : prouver que $\cos(n)$ est divergente de deuxième espèce.

u_n est bornée, donc elle ne peut pas être de $1^{\text{ère}}$ espèce.
Il suffit de montrer que u_n diverge

Par l'absurde, supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos(n) = \ell$
$1^{\text{ère}}$ étape : Montrons que $\sin(n)$ converge
Soit $n \in \mathbb{N}$, $\cos(n+1) = \cos(n)\cos(1) - \sin(n)\sin(1)$
or $\sin(1) \neq 0,\ \sin(n) = \dfrac{1}{\sin(1)}(\cos(n)\cos(1) - \cos(n+1))$
or si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$
Donc $\sin(n) = \dfrac{1}{\sin(1)}(\ell\cos(1) - \ell)$

$2^{\text{ème}}$ étape :
Passage au complexe $e^{in} = \cos(n) + i\sin(n)$
Donc (e^{in}) est convergente (mettons vers $\alpha \in \mathbb{R}$)

$$\lim_{n\to+\infty}\left(e^{in} - e^{i(n+1)}\right) = \alpha - \alpha = 0$$

$$\begin{aligned}\text{Soit } n \in \mathbb{N}, |e^{in} - e^{i(n+1)}| &= |e^{in}(1-e^i)| \\ &= [e^{in}||1-e^i| \\ &= |1-e^i| \neq 0 \ \text{ constant}\end{aligned}$$

Contradiction, d'où le résultat.

12. Vrai-Faux : “si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < v_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = v$, alors $u < v$" ? (preuve ou contre exemple...)

Faux : $\begin{cases} u_n = 0 \\ v_n = \frac{1}{n} \end{cases}$ $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < v_n$, mais $u = v = 0$

13. SAVOIR REFAIRE : on suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell > 0$. Montrer que, pour n suffisamment grand, $u_n > 0$

14. SAVOIR REFAIRE : énoncer et prouver le théorème "des gendarmes"(encadrement), avec (au choix du colleur) limite réelle ou infinie

Théorème (des gendarmes)

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) des suites réelles.

1. On suppose que $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq u_n \leq w_n \\ (v_n) \text{ et } (w_n) \text{ convergent vers le même réel } \ell \end{cases}$

Alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$

2. On suppose que $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq u_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} (v_n) = +\infty \end{cases}$

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

3. On suppose que $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq w_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} (w_n) = -\infty \end{cases}$

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

Preuve :

1. Soit $\varepsilon > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$, d'où $N_1 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N_1, |v_n - \ell| \leq \varepsilon$ i.e. $\forall n \geq N_1, \ell - \varepsilon \leq v_n \leq \ell + \varepsilon$

$\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell$, d'où $N_2 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N_2, |w_n - \ell| \leq \varepsilon$ i.e. $\forall n \geq N_2, \ell - \varepsilon \leq w_n \leq \ell + \varepsilon$

On pose $N = \max\{N_1; N_2\}$
Si $n \geq N$, alors $\ell - \varepsilon \leq v_n \leq u_n \leq w_n \leq \ell + \varepsilon$
Ainsi $\forall n \geq N$, $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$

2. Soit $A > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$
d'où un certain $N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \in N$, $v_n \geq A$
Ainsi, si $n \geq N$, on a $A \leq v_n \leq u_n$

3. Soit $A < 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = -\infty$
d'où un certain $N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \in N$, $w_n \leq A$
Ainsi, si $n \geq N$, on a $u_n \leq w_n \leq A$

15. SAVOIR REFAIRE : soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Construire une suite (u_n) de points de A qui converge vers $\sup(A)$

Soit $\varepsilon > 0$
Soit $n \in \mathbb{N}^*$
On pose $\varepsilon = \dfrac{1}{n} > 0$
D'où un certain $u_n \in A$ tq $\sup(A) - \dfrac{1}{n} < u_n \leq \sup(A)$

D'où une suite (u_n) de points de A tq $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sup(A) - \dfrac{1}{n} < u_n \leq \sup(A)$
Par encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sup(A)$

16. SAVOIR REFAIRE : que signifie le fait que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ "au sens des suites". Prouver l'équivalence avec le sens vu au chapitre précédent.

Mq A est une partie dense de $\mathbb{R}$ ssi tout réel est limite d'une suite de points de A

On suppose A une partie de $\mathbb{R}$
Soit $x \in \mathbb{R}$
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a = x$ et $b = \dfrac{1}{n} + x$
Ainsi on a une suite (u_n) de points de A tq $\forall n \in \mathbb{N}^*, x < u_n < x + \dfrac{1}{n}$ Or $\lim\limits_{n\to+\infty} x + \dfrac{1}{n} = x$, donc par encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = x$

Réciproquement, mq A est dense dans $\mathbb{R}$
Soient $a < b$ dans $\mathbb{R}$
On pose $x = \dfrac{a+b}{2}$, d'où une suite (u_n) de points de A tq $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = x$
On pose $\varepsilon = \dfrac{b-a}{2}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = x$, d'où $\forall n \geq N, |u_n - x| \leq \varepsilon = \dfrac{b-a}{2}$

17. SAVOIR REFAIRE : montrer qu'une suite croissante et majorée converge vers $\ell = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}(u_n)$

Soit $A = \{u_n / n \in \mathbb{N}\}$
Supposons que u_n est majorée
Donc A est non vide et majorée, d'où $\sup(A) = \ell$ (d'après l'ABS)

Montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$
Soit $\varepsilon > 0$,
$\ell - \varepsilon < \ell$, donc $\ell - \varepsilon$ ne majore pas A
D'où $N \in \mathbb{N}$ tq $u_N \geq \ell - \varepsilon$
Si $N \geq N$n on a donc $\ell - \varepsilon \leq u_N \leq u_n \leq \ell + \varepsilon$
donc $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$

Conclusion $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$

18. Vrai-Faux : "une suite réelle qui n'est pas majorée tend vers $+\infty$"

Faux : $((-2)^n)$ n'est pas majorée elle est de $2^{\text{ème}}$ espèce

19. SAVOIR REFAIRE : étudier la suite $u_{n+1} = \sin(u_n)$, avec $u_0 \in \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$

1. On envisage $\varphi : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x - \sin(x) \end{array}$

$\varphi'(x) = 1 - \cos(x)$

$$\begin{array}{ccccc} -1 & \leq & \cos(x) & \leq & 1 \\ -1 & \leq & -\cos(x) & \leq & 1 \\ 0 & \leq & 1-\cos(x) & \leq & 2 \end{array}$$

Donc $\varphi' > 0$, ainsi φ est croissante
Or $\varphi(0) = 0 - \sin(0) = 0$
Donc $\sin(x) \leq x$ avec égalité ssi x = 0

2. On montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$

Initialisation : $u_0 \in \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$ par hypothèse.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, tq $u_n \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$
$u_{n+1} = \sin(y_n)$
Or $\sin\left(\left]0; \frac{\pi}{2}\right[\right) \subset]0; 1[\subset]0; \frac{\pi}{2}[$
Donc $u_{n+1} \in \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$
ce qui achève la récurrence.

3. D'après le 1., on a $u_{n+1} = \sin(u_n) \leq u_n$
Donc (u_n) est décroissante.
Or d'après le 2., (u_n) converge.

Soit $\ell \in \mathbb{R}_+$, tq $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$
Ainsi, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \ell$ (suite décalée)
Or, $u_{n+1} = \sin(u_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \sin(\ell)$ car sin est continue.
Ainsi $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \sin(\ell)$
Par unicité de la limite $\sin(\ell) = \ell$
D'après le 1. cas d'égalité $l = 0$

Conclusion $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

20. Donner la définition des suites adjacentes, puis donner leurs propriétés

Définition

Deux suites réelles, (u_n) et (v_n) sont dites adjacentes lorsque l'une croît, l'autre décroît et la différence tend vers zéro.

Théorème (Propriété)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites adjacentes définies comme précédemment. Alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$

Théorème

1. Deux suites adjacentes convergent vers le même réel.
2. Il est caractérisé par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \ell \leq v_n$

21. SAVOIR REFAIRE : étudier la suite $u_0 = \dfrac{1}{2}$, $u_{n+1} = \dfrac{2}{1+u_n}$

Points fixes de f : Soit $\ell \in \mathbb{R}, \ell \neq 1, f(\ell) = \ell \Leftrightarrow \frac{2}{1+\ell} = \ell \Leftrightarrow \ell^2 + \ell - 2 = 0$
Racines évidente : $\ell = 1$, $\ell = -2$
Cette fois-ci, il semble que (u_n) n'est pas monotone, on prévoit que (u_n) tend vers 1 en oscillant de part et d'autre.

Mq $\forall n \in \mathbb{N}, u_0 \leq u_n \leq u_1$
Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$

Initialisation : $n = 0$

$$\begin{array}{ccccc} u_0 & \leq & u_n & \leq & u_1 \\ \dfrac{1}{2} & \leq & \dfrac{1}{2} & \leq & \dfrac{4}{3} \end{array}$$

Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$, tq

$$\begin{array}{ccccc} u_0 & \leq & u_n & \leq & u_1 \\ \frac{1}{2} & \leq & u_n & \leq & \frac{4}{3} \end{array}$$

or f est décroissante sur $\left[\dfrac{1}{2}; \dfrac{4}{3}\right]$

$$\begin{array}{ccccccc} & & f\left(\frac{4}{3}\right) & \leq & f(u_n) & \leq & f\left(\frac{1}{2}\right) \\ \frac{1}{2} & \leq & \frac{6}{7} & \leq & u_{n+1} & \leq & \frac{4}{3} \end{array}$$

ce qui achève la récurrence.

Mq $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$, pour cela mq $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n - 1| = 0$

On pose $w_n = |u_n - 1|$

Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= |u_{n+1} - 1| \\ &= \left|\frac{2}{1 + u_n} - 1\right| \\ &= \left|\frac{1 - u_n}{1 + u_n}\right| \\ &= \frac{|1 - u_n|}{|1 + u_n|} \end{aligned}$$

Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq \frac{1}{2}$

Donc $w_{n+1} \leq \dfrac{1}{\frac{1}{2} + 1} w_n$ ainsi $w_{n+1} = \dfrac{2}{3} w_n$

Par récurrence immédiate : $w_n \leq \left(\dfrac{2}{3}\right)^n w_0$

Or $0 < \dfrac{2}{3} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$, donc par encadrement $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 0$

i.e. $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n - 1| = 0$ i.e. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$

22. Énoncer le théorème des segments emboîtés

Théorème

Soit $([a_n; b_n])_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de segments telle que :
1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq b_n$
2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $[a_{n+1}; b_{n+1}] \subset [a_n; b_n]$ 3. $\exists \lim\limits_{n \to +\infty} (b_n - a_n) = 0$

Alors $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} [a_n; b_n]$ est non vide et réduite à un singleton.