I) Autot-test : suites réelles et complexes 2

1. Donner les définitions des relations d'équivalence, négligeabilité et domination pour les suites. Préciser les notation

Définition (Relation de négligeabilité)

On dit que $\left|\begin{array}{l}(u_n) \text{ est négligeable devant } (v_n) \\ (v_n) \text{ est prépondérant devant } (u_n)\end{array}\right|$ au voisinage de $+\infty$ lorsque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0$

On note alors $u_n \underset{+\infty}{\ll} v_n$ ou encore $u_n \underset{+\infty}{=} \circ(v_n)$

Définition (Relation d'équivalence)

On dit que (u_n) et (v_n) sont équivalents au voisinage de $+\infty$ lorsque $\lim\limits_{n\to} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$

On note alors $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$

Définition (Relation de domination)

On dit que (u_n) est dominé par (v_n) au voisinage de $+\infty$ lorsque :

$$\exists M > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n| \leq M(v_n)$$

On note alors $u_n \underset{+\infty}{=} \bigcirc(v_n)$

2. SAVOIR REFAIRE : énoncer et prouver le "petit théorème de d'Alambert".

Théorème (petit théorème de d'Alambert)

Soit (a_n) une suite réel strictement positifs
1. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \in [0;1[$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$
2. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \ell > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$

Preuve :
1. On suppose $0 \leq \ell < 1$
$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ donc avec $\varepsilon = r - \ell > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq r$
Si $n \geq N, a_{n+1} \leq ra_n$
Si $n - 1 \geq N$,
$a_n \leq ra_{n-1} \leq r^2 a_{n-2} \leq r^3 a_{n-3}$
$a_n \leq r^k a_{n-k}$ où $n - k \geq N$ avec n-k = N
Ainsi : $\forall n \geq N, 0 < a_n \geq r^n \dfrac{a_N}{r^N}$
Par encadrement : $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

2. Supposons que $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell > 1$
Montrons que $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$
Soit $r > 0$ tel que $1 < r < \ell$
$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq r$
Donc $\forall n \geq N, a_{n+1} \geq ra_n$
$\forall n \geq N-1, a_n \geq re_{n-1} \geq r^2 a_{n-2} \geq ... \geq r^k a_{n-k} \geq r^{n-N} a_N = r^n \dfrac{a_N}{r^N}$
$\forall n \geq N-1, a_n \geq r^n \left(\dfrac{a_N}{r^N}\right)$ et $r^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ car $r > 1$
Donc par encadrement $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

3. Donner les relation de négligeabilité des suites usuelles en $+\infty$

Théorème

Soit $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $a > 1$
Alors $(\ln(n))^\alpha \underset{+\infty}{\ll} n^\beta \underset{+\infty}{\ll} a^n \underset{+\infty}{\ll} n! \underset{+\infty}{\ll} n^n$

4. SAVOIR REFAIRE : pour $x \in \mathbb{R}$, quelle est la limite de $\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$?

$\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$

et $n\ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right) = n \times \dfrac{x}{n} \times \dfrac{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right) = 0$
On pose $h = \dfrac{x}{n}$
or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(1+h)}{h} = 1$
Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right) = x$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n = e^x$ par continuité de exponentielle en x

5. Donner les équivalents classique faisant intervenir une suite (ε_n) qui tend vers 0

Théorème

Soit (ε_n) une suite qui tend vers zéro

Alors : $\ln(1+\varepsilon_n) \underset{+\infty}{\sim} \varepsilon_n$

$\sin(\varepsilon_n) \underset{+\infty}{\sim} \varepsilon_n$

$e^{\varepsilon_n} - 1 \underset{+\infty}{\sim} \varepsilon_n$

$(1+\varepsilon_n)^\alpha - 1 \underset{+\infty}{\sim} \alpha\varepsilon_n$

6. SAVOIR REFAIRE : montrer que les relations de négligeabilité et d'équivalences sont transitives

Théorème

$$\text{Si}\quad \left.\begin{array}{l} u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \\ v_n \underset{+\infty}{\sim} w_n \end{array}\right\} \text{ alors } u_n \underset{+\infty}{\sim} w_n$$

$$\text{Si}\quad \left.\begin{array}{l} u_n \underset{+\infty}{\ll} v_n \\ v_n \underset{+\infty}{\ll} w_n \end{array}\right\} \text{ alors } u_n \underset{+\infty}{\ll} w_n$$

Preuve :
A partir d'un certain rang $u_n = (1+\varepsilon_n)v_n$ où $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$ $v_n = (1+\varepsilon'_n)w_n$ où $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon'_n = 0$

Donc

$$\begin{aligned} u_n &= (1+\varepsilon_n)(1+\varepsilon'_n)w_n \\ &= (1+\underbrace{\varepsilon'_n+\varepsilon_n+\varepsilon'_n\varepsilon_n}_{\varepsilon''_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0})w_n \\ &= (1+\varepsilon''_n)w_n \end{aligned}$$

Donc $u_n \underset{+\infty}{\sim} w_n$

Idem avec $\underset{+\infty}{\ll}$

7. Donner les propriétés classique sur les équivalences (négliger ce qui est négligeable, équivalents et limites).

Théorème (Négliger ce qui est négligeable)

] Si $u_n \underset{+\infty}{\ll} v_n$ alors $u_n + v_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$

$$\text{Si } u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \text{ alors } \left\{\begin{array}{l} u_n - v_n \underset{+\infty}{\ll} u_n \\ u_n - v_n \underset{+\infty}{\ll} v_n \end{array}\right.$$

Théorème (Equivalents et limites)

Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell \in \bar{\mathbb{R}}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \in \bar{\mathbb{R}}$
Si $\ell \in \mathbb{R}$ et si $l \neq 0$ alors $u_n \underset{+\infty}{\sim} \ell \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$

8. SAVOIR REFAIRE : peut-on sommer les équivalents ? peut-in les multiplier ? les quotienter ? Illustrer votre propos par preuves ou contre-exemples.
Somme :

$$\text{Si}\quad \begin{array}{l} u_n \underset{+\infty}{\sim} u'_n \\ v_n \underset{+\infty}{\sim} v'_n \end{array} \quad \neq u_n + v_n \underset{+\infty}{u}{}'_n + v'_n$$

On peut faire la somme uniquement s'ils ont le même signe.

Quotient et produit :

1. SI $\left.\begin{array}{l} u_n \underset{+\infty}{\sim} u'_n \\ v_n \underset{+\infty}{\sim} v'_n \end{array}\right\}$ alors $u_n v_n \underset{+\infty}{\sim} u'_n v'_n$
2. SI $v_n \neq 0$ $\left.\begin{array}{l} u_n \underset{+\infty}{\sim} u'_n \\ v_n \underset{+\infty}{\sim} v'_n \end{array}\right\}$ alors $\dfrac{u_n}{v_n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{u'_n}{v'_n}$

Contre exemple :

$u_n = n+1 \underset{+\infty}{\sim} n+\sqrt{n} = u'_n$
$v_n = -n+1 \underset{+\infty}{\sim} -n+1 = v'_n$
$u_n + v_n = 1$ or $u'_n + v'_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{n}+1$

9. Vrai-Faux : "on suppose que $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$. Alors pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $u_n^\alpha \underset{+\infty}{\sim} v_n\alpha$? ? $e^{u_n} \underset{+\infty}{\sim} e^{v_n}$? ? $\ln(u_n) \underset{+\infty}{\sim} \ln(v_n)$? ?" Illustrer vos propos par preuves ou contre-exemples.

10. SAVOIR REFAIRE : énoncer et prouver le théorème de Césaro

11. SAVOIR REFAIRE : (suites implicites). Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'équation $x^3+x-n=0$ admet une unique solution notéex_n. Montrer que la suite (x_n) tend vers $+\infty$, puis que $0 \leq x_n \leq n^{\frac{1}{3}}$, et enfin que $x_n \subset +\infty \sim n^{\frac{1}{3}}$

Soit $\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3+x \end{array}$
On cherche à résoudre $\varphi(x) = n$
φ est dérivable et $\varphi' : x \to 3x^2+1 > 0$
Donc φ est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$
D'après le théorème de la bijection continue elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\varphi(\mathbb{R})$.
Ici : $\varphi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$
Ainsi : si $x \in \mathbb{R}$, alors $\varphi(x) = n \Leftrightarrow x = \varphi^{-1}(n)$.
En particulier l'équation proposée a une unique solution.

Déterminons la limite éventuelle de (x_n).
J'affirme que (x_n) est croissante, en effet si $n \leq n+1$, alors $\varphi^{-1}(n) \leq \varphi^{-1}(n+1)$ car φ est croissante, donc φ^{-1} aussi. Donc $x_n \leq x_{n+1}$
D'après le Théorème de la limite monotone, $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$
Montrons que $\ell = +\infty$
Par l'absurde : Si $\ell \in \mathbb{R}$, alors $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et $x_n^3 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell^3$
Or $\forall n \in \mathbb{N}, x_n^3 + x_n = n, x_n^3 + x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell^3 + \ell \in \mathbb{R}$ et $n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$
D'où la contradiction.

Montrons que $x_n \subset +\infty \sim n^{\frac{1}{3}}$
Ici si $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n^3 + x_n = n$ $(\star)$
Or $x_n \subset +\infty \ll x_n^3$ car $\dfrac{x_n}{x_n^3} = \dfrac{1}{x_n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ car $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$
Donc $x_n^3 + x_n \underset{+\infty}{\sim} x_n^3$

Ainsi $x_n^3 \underset{+\infty}{\sim} n$ d'après $(\star)$
Donc $x_n \underset{+\infty}{} n^{\frac{1}{3}}$

12. Qu'est ce qu'une extraction ? une suite extraite ?

Définition

1. On appelle extraction toute application $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante.
2. On appelle suite extraite (ou sous-suite) de le suite (u_n), toute suite de la forme $(u_{\alpha_n})_{n\in\mathbb{N}}$ où $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une extraction.

13. Traduire en termes de sous-suites le fait que (u_n) n'est pas majorée.

Théorème

Une sous-suite réele (u_n) n'est pas majoré ssi on peut en extraire une sous-suite $(u_{\alpha_{(n)}})$ tel que $u_{\alpha_{(n)}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

14. Énoncer le théorème de Bolzano-Weierstrass.

Théorème (de Bolzano-Weierstrass)

De toutes suites réelle (ou complexe) bornée, on peut extraire une suite qui converge.

15. Qu'est ce qu'une valeur d'adhérence d'une suite ?

Définition

Soit (u_n) une suite réelle ou complexe.
On appelle valeur d'adhérence de (u_n) toutes limite réelle ou complexe d'une sous suite de (u_n)

16. Donner un exemple de suite ayant 2 valeurs d'adhérence. Et 3 valeurs d'adhérence ?

$u_n = (-1)^n$ à deux valeurs d'adhérence 1 et -1, en effet $u_{2n} = 1$ et $u_{2n+1} = -1$
$v_n = j^n$ à trois valeurs d'adhérence $1, j$ et j^2

17. Vrai-faux : "une suite ayant une seule valeur d'adhérence converge" ?

Faux $\begin{cases} u_{2n} = 0 \\ u_{2n+1} = n \end{cases}$, ping pong entre 0 et $+\infty$