I) Les intégrales généralisées

Définition

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur l'intervalle $[a, b[$.
Si pour tout $c \in [a, b[$, la fonction f est intégrable sur l'intervalle $[a, c[$ i.e. si l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_a^c f(t)dt$ existe on dit que f est localement intégrable sur $[a, b[$

Définition

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur l'intervalle $[a, b[$ et localement intégrable sur $[a, b[$.
La fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie sur $[a, b[$ par l'égalité $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est appelée la fonction intégrale de f sur $[a, b[$.

Définition

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie sur l'intervalle $[a, b[$.
Soit $F : x \to F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ la fonction intégrale de f sur $[a, b[$.
Si $\displaystyle\lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} F(x)$ existe et est un nombre réel ℓ i.e. si on a $\displaystyle\lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} \int_a^x f(t)dt = \ell$
On décide de désigner ce nombre ℓ par le symbole $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$
On dit alors que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge.
Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ diverge.

Définition

Déterminer la nature d'un intégrale généralisée c'est déterminer si elle est convergente ou bien divergente.

Théorème (Propriété)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, fonction définie et localement intégrable sur $[a, b[$.
$\forall a' \in [a, b[$, les deux intégrales généralisées $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ et $\displaystyle\int_{a'}^b f(t)dt$ sont de même nature

Preuve :
Considérons pour $x \in [a, b[$, $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$
Grâce à la relation de Chasles

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt = \underbrace{\int_a^{a'} f(t)dt}_{\alpha \in \mathbb{R}} + \int_{a'}^x f(t)dt$$

On voit sur cette égalité que l'existence de la limite quand $x \to b$ de $\displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est équivalente à l'existence de la limite quand $\displaystyle\int_{a'}^x f(t)dt$

Théorème (Critère de Cauchy)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie et localement intégrable sur $[a, b[$.
Les deux assertions suivantes sont équivalentes

1. L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge
2. $\forall\varepsilon > 0, \exists c \in [a, b[, \forall x_1 \in [c, b[$ et $\forall x_2 \in [c, b[, \left|\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt\right| \leq \varepsilon$

Preuve :
$1 \Rightarrow 2$: On suppose que $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est convergente i.e. $\displaystyle\lim_{\substack{x\to b\\x<b}} F(x) = \lim_{\substack{x\to b\\x<b}} \int_a^x f(t)dt = \ell \in \mathbb{R}$
Or écrire que $\displaystyle\lim_{\substack{x\to b\\x<b}} = \ell$ revient à écrire que $\forall\varepsilon > 0, \exists c \in [a, b[, \forall x \in [a, b[, x \geq c \Rightarrow |F(x) - \ell| \leq \varepsilon$
Donc
$\forall\varepsilon > 0, \exists c \in [a, b[, \forall x_1 \in [a, b[, x_1 \geq c \Rightarrow |F(x_1) - \ell| \leq \varepsilon$
$\forall\varepsilon > 0, \exists c \in [a, b[, \forall x_1 \in [a, b[, x_2 \geq c \Rightarrow |F(x_1) - \ell| \leq \varepsilon$

Donc
$\forall\varepsilon > 0, \exists c \in [a, b[, \forall x_1 \in [a, b[$ et $\forall x_2 \in [a, b[, x_1 \geq c$ et $x_2 \geq c \Rightarrow |F(x_1) - \ell| < \varepsilon$ et $|F(x_2) - \ell| < \varepsilon$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow |F(x_2) - F(x_1)| &= |F(x_2) - \ell + \ell - F(x_1)| \\
\left|\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt\right| &\leq |F(x_2) - \ell| + |F(x_1) - \ell| \qquad \text{par inégalité triangulaire} \\
&< 2\varepsilon
\end{aligned}$$

$2 \Rightarrow 1$ admis.

Théorème (Propriété)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie et localement intégrable sur $[a, c[$.
On suppose que l'intégrale généralisé $\displaystyle\int_a^b |f(t)|dt$ converge.
Alors l'intégrale généralisé $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge.

Preuve :
Appliquons le critère de Cauchy à la fonction $|f|$.
Par hypothèse : l'intégrale généralisé $\int_a^b |f(t)|dt$ converge, ce qui est équivalent à :
$\forall\varepsilon > 0, \exists x \in [a, b[, \forall x_1 \in [c, b[$ et $\forall x_2 \in [c, b[, \left|\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} |f(t)|dt\right| < \varepsilon$
1^{er} cas : $x_1 \leq x_2$, $0 \leq \displaystyle\int_{x_1}^{x_2} |f(t)|dt = \left|\int_{x_1}^{x_2} |f(t)|dt\right| < \varepsilon$
$2^{\text{ème}}$ cas :$x_1 \geq x_2$, $0 \leq \displaystyle\int_{x_2}^{x_1} |f(t)|dt = \left|\int_{x_1}^{x_2} |f(t)|dt\right| < \varepsilon$
Donc ici $\left|\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt\right| \leq \left|\int_{x_1}^{x_2} |f(t)|dt\right| < \varepsilon$

En résumé on vient d'obtenir $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in [a, b[, \forall x_1 \in [c, b[$ et $\forall x_2 \in [c, b[, \left|\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt\right| < \varepsilon$

Ce qui entraîne (Cauchy) que $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge.

Théorème (Propriété)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie sur $[a, b[$.
$\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est une intégrale généralisé convergente ssi $\exists M > 0, \forall x \in [a, b[, \int_a^x f(t)dt \leq M$

Preuve :
Supposons que $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est une intégrale généralisée convergente.
Donc $\exists \ell \in \mathbb{R}_+, \lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} F(x) = \lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} \displaystyle\int_a^x f(t)dt = \ell$
D'autre part F est croissante.
Donc $\forall x \in [a, b[, F(x) \leq \ell$.
On pose $M = \ell$

Réciproquement, supposons que $\exists M > 0, \forall x \in [a, b[, F(x) \leq M$
Or F est croissante, donc par théorème de la limite monotone $\exists \ell \in \mathbb{R}, \lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} = \ell$

Donc $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge.

Théorème (Critère de domination)

Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$, définies et localement intégrables sur $[a, b[$.
On suppose que $\forall t \in [a, b[, f(t) \leq g(t)$ (f est dominé par g)
Alors
1. si $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ converge alors $\int_a^b f(t)dt$ converge.
2. si $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ diverge alors $\int_a^b g(t)dt$ diverge.

Preuve :
$\forall x \in [a, b[$ on a $\displaystyle\int_a^x f(t)dt \leq \int_a^x g(t)dt$ autrement dit $F(x) \leq G(x)$.
On se rappelle que F et G sont des fonctions croissantes.
1. Si $\displaystyle\int_a^x g(t)dt$ converge, cela signifie que $\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} G(x) = \ell_2 \in \mathbb{R}_+$ et que $\forall x \in [a, b[, G(x) \leq \ell_2$.

D'après $F(x) \leq G(x)$ on a $F(x) \leq \ell_2$ donc par propriété en posant $M = \ell_2$, on obtient que $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge.

2. si $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ diverge, cela signifie que $\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} F(x)$ n'existe pas dans $\mathbb{R}$.
Or F est croissante
Donc $\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} F(x) = +\infty$
D'après $F(x) \leq G(x)$, $\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} G(x) = +\infty$

Donc $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ diverge.

Théorème (Critère d'équivalence)

Soient f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définies et localement intégrables sur $[a, b[$.
On suppose que f et g sont équivalentes dans un voisinage de b.
Alors les deux intégrales généralisées $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ sont de même nature.

Preuve :
$\forall \varepsilon > 0, \exists c \in [a, b[, \forall t \geq c \Rightarrow (1-\varepsilon)g(t) \leq f(t) \leq (1+\varepsilon)g(t)$
Nous avons là des dominations. On fait donc appel au critère de domination.

Théorème (Propriété 1)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, l'intégrale généralisé $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}dt$ converge ssi $\alpha > 1$

Preuve :
1^{er} cas : $\alpha = 1$

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{t}dt = [\ln(t)]_1^x = \ln(x)$$

Or $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$, donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}dt$ diverge

$2^{\text{ème}}$ cas : $\alpha \neq 1$

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_1^x \frac{1}{t^\alpha}dt \\ &= \left[\frac{1}{(1-\alpha)}\frac{1}{t^{\alpha-1}}\right]_1^x \\ &= \frac{1}{(1-\alpha)}\frac{1}{x^{\alpha-1}} - \frac{1}{1-\alpha} \end{aligned}$$

Or pour $\alpha > 1$ $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} F(x) = \frac{1}{\alpha - 1} \in \mathbb{R}$ et pour $\alpha < 1$ $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$

Théorème (Propriété 2)

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $b \geq a$
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, l'intégrale généralisé $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{(b-t)^\alpha}dt$ converge ssi $\alpha < 1$

Preuve :
$f(t) = \dfrac{1}{(b-t)^\alpha}$ est une fonction définie continue et positive sur $[a, b[$.

1^{er} cas : $\alpha = 1$

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_a^x \frac{1}{b-t}dt \\ &= [-\ln(b-t)]_a^x \\ &= -\ln(b-x) + \ln(b-a) \\ &= \ln\left(\frac{b-a}{b-x}\right) \end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{\substack{x\to b\\x<b}} F(x) = +\infty$, donc $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{b-t}dt$ diverge.

2nd cas : $\alpha \neq 1$

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_a^x \frac{1}{(b-t)^\alpha}dt \\ &= \left[\frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{(b-t)^{\alpha-1}}\right]_a^x \\ &= \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{(b-x)^{\alpha-1}} - \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{(b-a)^{\alpha-1}} \end{aligned}$$

Or pour $\alpha > 1$ $\lim\limits_{\substack{x\to b\\x<b}} F(x) = +\infty$ et pour $\alpha < 1$ $\lim\limits_{\substack{x\to b\\x<b}} F(x) = \dfrac{1}{1-\alpha}\dfrac{1}{(b-a)^{\alpha-1}} \in \mathbb{R}$

Théorème (Critère de puissance)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie, localement intégrable et positive sur $[a, +\infty[$
Alors

1. si il existe $\alpha > 1$ tel que $\lim\limits_{t\to+\infty} t^\alpha f(t) = 0$ alors l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge.
2. si il existe $\alpha \leq 1$ tel que $\lim\limits_{t\to+\infty} t^\alpha f(t) = +\infty$ alors l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ diverge.

Preuve :

1. On suppose qu'il existe $\alpha > 1$ tel que $\lim\limits_{t\to+\infty} t^\alpha f(t) = 0$
$\forall\varepsilon > 0, \exists r > 0, \forall t \in [a, +\infty[, t \geq r \Rightarrow |t^\alpha f(t)| \leq \varepsilon$
$\forall\varepsilon > 0, \exists r > 0, \forall t \in [a, +\infty[, t \geq r \Rightarrow f(t) \leq \frac{\varepsilon}{t^\alpha}$
Par critère de domination, vu que $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}dt$ converge car $\alpha > 1$ alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge.

2. $\forall 1 > 0, \exists r \in [a, +\infty[, \forall t \geq r \Rightarrow |t^\alpha f(t)| \geq A$
$\forall 1 > 0, \exists r \in [a, +\infty[, \forall t \geq r \Rightarrow f(t) \geq \frac{A}{t^\alpha}$

Par critère de domination vu que l'intégrale généralisé $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}dt$ diverge car $\alpha < 1$ alors l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ diverge.

Définition

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie et localement intégrable sur $[a, b[$.
Si l'intégrale généralisée $\int_a^b |f(t)|dt$ converge on dit que l'intégrale généralisée converge absolument.

Définition

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie et localement intégrable sur $[a, b[$.

On suppose que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ converge sans convergence absolue i.e. $\displaystyle\int_a^b |f(t)|dt$ diverge.
On dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ est semi-convergente.

Théorème (d'Abel)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie et localement intégrable sur $[a, b[$.
On suppose que f s'écrit $f(t) = g(t)h(t)$ tq
1. g est décroissante sur $[a, b[$ et $\lim\limits_{\substack{t \to b \\ t<b}} g(t) = 0$
2. $\exists M > 0, \forall x_1 \in [a, b[, \forall x_2 \in [a, b[, \left|\int_{x_1}^{x_2} h(t)dt\right| \leq M$

Alors l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge.

Preuve :
Admis

Théorème

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$.
Les intégrales généralisées du type $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha (\ln(t))^\beta} dt$ $(a > 1)$ sont appelés des intégrales de Bertrand.
L'intégrale de Bertrand converge ssi $\alpha = 1$ et $\beta > 1$ ou $\alpha > 1$ et β quelconque.

Preuve :
1er cas : $\alpha = 1$
On s'intéresse à $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{t \ln(t)^\beta} dt$, c'est du type $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{u'}{u^\beta} dt$ avec $u = \ln(t)$ et $u' = \dfrac{1}{t}$
Or $\dfrac{u'}{u^\beta} = u'u^{-\beta}$ dont une primitive est $\dfrac{u^{-\beta+1}}{-\beta+1}$
Dans le cas $\beta \neq 1$
La fonction intégrale est

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_a^x u'u^{-\beta} dt \\ &= \left[\frac{u^{-\beta+1}}{-\beta+1}\right]_a^x \\ &= \left[\frac{(\ln(t)^{-\beta+1})}{-\beta+1}\right]_a^x \\ &= \frac{-(\ln(a))^{-\beta+1}}{-\beta+1} + \frac{(\ln(x))^{-\beta+1}}{-\beta+1} \end{aligned}$$

Pour $\beta < 1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$
Pour $\beta > 1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = \dfrac{-(\ln(a))^{-\beta+1}}{-\beta+1} \in \mathbb{R}$
Dans le cas $\beta = 1$, la fonction intégrale est $F(x) = \displaystyle\int_a^x \frac{1}{t \ln(t)} dt$, c'est du type $\dfrac{u'}{u}$ dont une primitive est $\ln(u)$.
Donc $F(x) = [\ln(\ln(t))]_a^x = \ln(\ln(x)) - \ln(\ln(a))$
Ainsi $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$
Donc l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{t \ln(t)}$ diverge.

2ème cas :
Je multiplie la fonction par $t^{\frac{\alpha+1}{2}}$

$$t^{\frac{\alpha+1}{2}} \times \frac{1}{t^\alpha (\ln(t))^\alpha} = \frac{1}{t^{\frac{\alpha-1}{2}} (\ln(t))^\beta}$$

Voyons ce que devient cette expression quand t tend vers $+\infty$.
1^{er} sous-cas : $\alpha > 1$

$$\lim_{t\to+\infty} t^{\frac{1}{\alpha+1}} f(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t^{\frac{\alpha-1}{2}}(\ln(t))^{\beta}} = 0$$

Donc par critère de la puissance, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge.

$2^{\text{ème}}$ sous cas : $\alpha < 1$

$$\lim_{t\to+\infty} t^{\frac{1}{\alpha+1}} f(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t^{\frac{\alpha-1}{2}}(\ln(t))^{\beta}} = +\infty$$

Donc par critère de la puissance, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ diverge.

Définition

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, fonction définie et localement intégrable sur $]a, b[$

1^{er} cas : $\exists c \in]a, b[$ tel que l'intégrale généralisée par la gauche $\displaystyle\int_a^c f(t)dt$ converge et l'intégrale généralisée par la droite $\displaystyle\int_c^b f(t)dt$ converge.
La somme $\displaystyle\int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$ est désigné par le symbole $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$.
On dit que c'est une intégrale doublement généralisée convergente.

$2^{\text{ème}}$ cas : si $\forall c \in]a, b[$, l'intégrale généralisée par la gauche $\displaystyle\int_a^c f(t)dt$ diverge, ou/et l'intégrale généralisée par la droite $\displaystyle\int_c^b f(t)dt$ diverge.
On dit que l'intégrale doublement généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ diverge.