I) Les intégrales à paramètres

Théorème

Si $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (t,x) & \longmapsto & f(t,x) \end{array}$ est continue sur son ensemble de définition alors la fonction Φ définie sur $A\subset E$ par $\Phi: \begin{array}{ccc} A\subset E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^b f(t,x)dt \end{array}$ est une fonction continue sur A

Preuve :

Théorème

Soit $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (t,x) & \longmapsto & f(t,x) \end{array}$ définie et continue sur $[a,b]\times I$ avec $a\leq b$ et I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

Soit la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (t,x) & \longmapsto & \frac{\partial f(t,x)}{\partial x} \end{array}$

On suppose que cette fonction est elle aussi définie et continue sur $[a,b]\times I$ i.e. f est C^1. Alors la fonction Φ est de classe C^1 sur l'intervalle I et on a

$$\Phi'(x) = \int_a^b \frac{\partial f(t,x)}{\partial x}dt$$

Preuve :

Définition

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension $n>0$

Soit $f: \begin{array}{ccc} [a,b[\times A\subset \mathbb{R}\times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (t,x) & \longmapsto & f(t,x) \end{array}$

On suppose que f est définie, continue sur $[a,b[\times A$ avec A un sous ensemble de E et $a<b$.

Considérons l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t,x)dt$

- si pour x fixe, l'intégrale est convergente, on dit qu'elle converge simplement.
  On parle de convergence simple
- si pour tout x l'intégrale est convergente, on dit qu'elle converge uniformément.
  On, parle de convergence uniforme

Théorème (Critère de convergence uniforme ou de domination uniforme)

$$\text{Soit } f: \begin{array}{ccc} [a,b[\times A \subset \mathbb{R}\times E & \longrightarrow & \mathbb{R}(\text{ou } \mathbb{C}) \\ (t,x) & \longmapsto & f(t,x) \end{array}$$

On suppose f définie et continue.
Si il existe $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ définie, continue et positive sur $[a,b[$ telle que $\forall (t,x), |f(t,x)| \leq g(t)$ et tel que $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ est un intégrale généralisée convergente, alors l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t,x)dt$ converge uniformément.

Preuve :

Théorème (d'Abel uniforme)

$$\text{Soit } f: \begin{array}{ccc} [a,b[\times A \subset \mathbb{R}\times E & \longrightarrow & \mathbb{R}(\text{ou } \mathbb{C}) \\ (t,x) & \longmapsto & f(t,x) \end{array}$$

On suppose que f est définie et continue sur $[a,b[\times A$
On suppose que f se réécrit $f = g \times h$ avec

- pour chaque x fixé, la fonction $g : t \mapsto g(t,x)$ est positive, décroissante et tend vers 0.
- la famille de fonction $g : t \mapsto g(t,x)$ converge uniformément vers la fonction nulle
- h est continue sur $[a,b[\times A$ et $\exists M > 0, \forall x \in [a,b[, \forall x \in A, \left|\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} h(t,x)dt\right| \leq M$

Alors l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t,x)dt = \int_a^b g(t,x)h(t,x)dt$ converge uniformément

Preuve :

Théorème

Soient $a < b$ et $A \subset E$, avec E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension $n > 0$.

$$\text{Soit } f: \begin{array}{ccc} [a,b[\times A \subset \mathbb{R}\times E & \longrightarrow & \mathbb{R}(\text{ou } \mathbb{C}) \\ (t,x) & \longmapsto & f(t,x) \end{array} \quad \text{définie et continue sur } [a,b[\times A$$

$$\text{Soit } \Phi: \begin{array}{ccc} A \subset E & \longrightarrow & \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C}) \\ x & \longmapsto & \Phi(x) = \displaystyle\int_a^b f(t,x)dt \end{array}$$

Si l'intégrale généralisé $\displaystyle\int_a^b f(t,x)dt$ converge uniformément, la fonction Φ est continue sur A

Preuve :

Théorème

Soient $a < b$ et I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) définie et continue sur $[a, b[\times I$

Soit $\Phi : \begin{array}{ccc} A \subset E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \Phi(x) = \displaystyle\int_a^b f(t,x)dt \end{array}$

Si l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t,x)dt$ converge

Si la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x} : \begin{array}{ccc} [a, b[\times I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (t,x) & \longmapsto & \frac{\partial f(t,x)}{\partial x} \end{array}$ existe et est continue sur $[a, b[\times I$ et si l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b \frac{\partial f(t,x)}{\partial x}dt$ converge uniformément

Alors Φ est de classe C^1 sur I et $\forall x \in I, \Phi'(x) = \displaystyle\int_a^b \frac{\partial f(t,x)}{\partial x}dt$

Preuve :